RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT

ABSTRACTE ANALYSE II

1973

DR. J. van Tiel

Mathematisch Instituut

A B S T R A C T E   A N A L Y S E II

1 9 7 3

DR. J. van Tiel

Analyse II.

Hoe deze syllabus te gebruiken. Deze syllabus is geen toelichting op of uittreksel van het college, maar omgekeerd: de syllabus bevat de leerstof voor het tweede semester-college Analyse, en het college geeft hierop, voor zover de tijd het toelaat, toelichting. Tenzij het tegendeel wordt medegedeeld behoren daarom ook die delen van de syllabus die niet tijdens het college zijn "behandeld" te worden bestudeerd. Meestal is een zinvol gebruik van de toelichting (tijdens het college) slechts mogelijk indien men met de te behandelen stof reeds enigszins vertrouwd is, bijv. door het vooraf doorlezen van de syllabus.
U dient de stof zo onder de knie te krijgen dat U opgaven van een niveau als dat van de hier opgenomene kunt maken. Sommige opgaven zullen op het praktikum aan de orde komen; de andere kunnen dienen als extra oefenstof.

Hoofdstuk I. De Riemann-integraal van continue functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

In dit hoofdstuk definiëren we de Riemann-integraal van continue functies $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; enkele eenvoudige eigenschappen hiervan worden afgeleid. Later zullen we ons met een grotere functieklasse, die der Riemann-integreerbare functies, bezighouden; bovendien beschouwen we dan ook het geval $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Alle onderstaande functies zijn reëelwaardig.

§1. De Riemann-integraal.

In deze paragraaf bewijzen we enkele beweringen uit de "Infinitesimaalrekening" voor het geval dat we met continue functies te maken hebben.

(1.1) Zij f continu op $[a,b]$; zij D een verdeling van $[a,b]$ in eindig veel deelsegmenten door middel van een rijtje $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. We noemen $\inf_k(f) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ en $\sup_k(f) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. De bovensom $\overline{s}_D$ en de ondersom $\underline{s}_D$ van f bij D definiëren we als

$$\overline{s}_D(f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_k(f)\cdot(x_k - x_{k-1}), \quad \underline{s}_D(f) = \sum_{k=1}^{n} \inf_k(f)\cdot(x_k - x_{k-1}).$$

Er geldt $(b-a) \cdot \inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) \leqslant \underline{s}_D(f) \leqslant \overline{s}_D(f) \leqslant (b-a) \cdot \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

Tenslotte definiëren we $\overline{s}(f)$ en $\underline{s}(f)$ door

$$\overline{s}(f) = \inf \{\overline{s}_D \mid D \text{ is verdeling van } [a,b]\},$$
$$\underline{s}(f) = \sup \{\underline{s}_D \mid D \text{ is verdeling van } [a,b]\}.$$

Is E een tweede verdeling van $[a,b]$ en is F een gemeenschappelijke verfijning van D en E (d.w.z. een verdeling die als deelpunten zowel die van D als die van E bevat), dan is

$$\underline{s}_D(f) \leqslant \underline{s}_F(f) \leqslant \overline{s}_F(f) \leqslant \overline{s}_E(f),$$

immers als $[p,q] \subset [r,s]$, dan is

$$\inf_{p\leqslant x\leqslant q} f(x) \geqslant \inf_{r\leqslant x\leqslant s} f(x) \text{ en } \sup_{p\leqslant x\leqslant q} f(x) \leqslant \sup_{r\leqslant x\leqslant s} f(x).$$

Er volgt dat $\underline{s}(f) \leqslant \overline{s}(f)$. Maar er geldt zelfs:

(1.2) <u>Stelling</u>. $\overline{s}(f) = \underline{s}(f)$.

<u>Bewijs</u>: Zij $\varepsilon > 0$. f is uniform continu op $[a,b]$, dus er is een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x,y \in [a,b]$ met $|x-y| < \delta$ geldt $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Zij D een verdeling van $[a,b]$ waarvan alle deelsegmenten lengte $< \delta$ hebben. Dan is

$$\sup_k(f) - \inf_k(f) \leqslant \varepsilon/(b-a)$$

(zelfs "<"; waarom?), dus

$$\overline{s}_D(f)-\underline{s}_D(f) = \sum_{k=1}^{n} [\sup_k(f)-\inf_k(f)](x_k-x_{k-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Er volgt dat

$$\underline{s}(f) \leqslant \overline{s}(f) \leqslant \overline{s}_D(f) \leqslant \underline{s}_D(f) + \varepsilon \leqslant \underline{s}(f) + \varepsilon$$

dus

$$0 \leqslant \overline{s}(f) - \underline{s}(f) \leqslant \varepsilon.$$

Aangezien ε willekeurig is volgt hieruit dat $\overline{s}(f) = \underline{s}(f)$.

(1.3) <u>Definitie</u>. De (Riemann-)<u>integraal</u> van f over $[a,b]$ is het getal $\overline{s}(f)$ $(= \underline{s}(f))$; we geven het ook aan met

$$I(f) \text{ of } I_f[a,b] \text{ of } \int_a^b f(x)dx$$

(waarbij de letter x door elke andere letter mag worden vervangen).

(1.4) <u>Stelling</u>.

<u>a</u>. Zijn f en g continu op $[a,b]$, dan is

$$I(\alpha f+\beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \qquad (\alpha,\beta \in \mathbb{R}).$$

b. Is f continu op $[a,b]$ en is $a < c < b$, dan is

$$I_f[a,c] + I_f[c,b] = I_f[a,b].$$

Bewijs:

a. Voor elke verdeling D van $[a,b]$ is

$$\sup_k(\alpha f) = \begin{cases} \alpha \sup_k(f) & \text{als } \alpha \geq 0 \\ \alpha \inf_k(f) & \text{als } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{(ga na).}$$

Er volgt dat

$$\overline{s}_D(\alpha f) = \begin{cases} \alpha\overline{s}_D(f) & \text{als } \alpha \geq 0 \\ \alpha\underline{s}_D(f) & \text{als } \alpha < 0 \end{cases}$$

dus $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ (ga na).

Verder is $\sup_k(f+g) \leq \sup_k(f) + \sup_k(g)$, dus $\overline{s}_D(f+g) \leq \overline{s}_D(f)+\overline{s}_D(g)$

Voor elke $\varepsilon > 0$ is er een verdeling D van $[a,b]$ waarvoor geldt

$$\overline{s}_D(f) - \underline{s}_D(f) \leq \varepsilon \text{ en } \overline{s}_D(g) - \underline{s}_D(g) \leq \varepsilon$$

(zie het bewijs van (1.2)); er volgt dat voor deze D geldt

$$I(f+g) \leq \overline{s}_D(f+g) \leq \underline{s}_D(f) + \underline{s}_D(g) + 2\varepsilon \leq I(f) + I(g) + 2\varepsilon;$$

we concluderen dat $I(f+g) \leq I(f) + I(g)$. Op analoge wijze bewijst men dat $I(f+g) \geq I(f) + I(g)$ (ga na). Er volgt dat $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

b. Zij F een verdeling van $[a,b]$; laten D en E de door F geïnduceerde verdelingen van resp. $[a,c]$ en $[c,b]$ zijn. Er geldt

$$\overline{s}_F(f) \geq \overline{s}_D(f) + \overline{s}_E(f) \geq I_f[a,c] + I_f[c,b]$$

(ga na) dus

$$(*) \quad I_f[a,b] \geq I_f[a,c] + I_f[c,b].$$

Op analoge wijze bewijst men dat in (*) het $\leq$-teken geldt, waarmee het gestelde bewezen is.

(1.5) De in stelling (1.4), b genoemde formule is geldig voor alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ en f die continu is op het kleinste segment dat a,b,c bevat, als we definiëren

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \text{als } a > b$$

en

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$(a,b \in \mathbb{R})$. Ga na.

(1.6) Stelling. Laten f en g continu zijn op $[a,b]$.

a. Is $f(x) \leqslant g(x)$ $(x \in [a,b])$, dan is
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

b. Is $|f(x)| \leqslant M$ $(x \in [a,b])$, dan is
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M(b-a).$$

Bewijs.

a. Uit $f(x) \leqslant g(x)$ $(x \in [a,b])$ volgt dat voor iedere verdeling D van $[a,b]$ geldt
$$\overline{s}_D(f) \leqslant \overline{s}_D(g)$$
dus $I(f) \leqslant I(g)$.

b. Pas a toe op $f(x) \leqslant M$ resp. $-M \leqslant f(x)$, en gebruik dat $\int_a^b 1\cdot dx = b-a$ (hetgeen uit de definitie van integraal volgt).

(1.7) Stelling. Zij f continu op $[a,b]$.

a. Definiëren we $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ door
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
dan is $F' = f$.

b. Is G een primitieve van f (d.w.z. geldt $G' = f$), dan is
$$\int_a^b f(t)dt = [G]_a^b = G(b) - G(a).$$

Bewijs.

a. Zij $x \in [a,b]$, $x+h \in [a,b]$. Uit de definitie van integraal volgt dat
$$\int_x^{x+h} 1\cdot dt = h \text{ dus } \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt = f(x).$$
Nu is
$$\left|\frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t)-f(x)]dt\right| \quad (*).$$
Zij $\varepsilon > 0$. Aangezien f continu is in x is er een $\delta > 0$ zó dat $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ voor alle t met $|t-x| < \delta$. Voor $|h| < \delta$ is het rechterlid van (*) kleiner dan $\frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot|h| = \varepsilon$, waaruit het gestelde volgt.

b. Uit $G' = f$ en $F' = f$ volgt $(G-F)'(x) = 0$ voor alle $x \in [a,b]$; dus is er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zó dat $G-F = \alpha$ ofwel $F = G - \alpha$.

Door substitutie van $x = a$ in

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - \alpha$$

vinden we $\alpha = G(a)$, waaruit het gestelde volgt.

(1.8) Stelling (substitutieregel).

Is f continu op $[a,b]$ en is $\phi : [c,d] \to [a,b]$ continu differentieerbaar (dat wil zeggen: bestaat ϕ' en is deze continu), terwijl $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$, dan is

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Bewijs. Definieer F als in (1.7), en $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ als $G = F \circ \phi$. Volgens de kettingregel is $G' = (F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \cdot \phi'$; volgens (1.7), b is dus

$$\int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt = G(d) - G(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

(1.9) Stelling (partiële integratie).

Zijn f en g continu differentieerbaar op $[a,b]$, dan is

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Bewijs: m.b.v. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ en (1.7).

(1.10) Toepassing: de logaritmische en de exponentiële functie.

Met behulp van de integraal kan men nieuwe functies invoeren. Als voorbeeld definiëren we

$$(*) \quad \log x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x > 0).$$

Volgens (1.8) is voor $x > 0$, $y > 0$:

$$(**) \quad \log (xy) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{du}{u} = \log x + \log y$$

(gebruikt is de substitutie $t = xu$). Uit (*) volgt dat log strikt monotoon stijgend en differentieerbaar is (met afgeleide $x \mapsto \frac{1}{x}$) en dus een strikt monotoon stijgende en differentieerbare inverse heeft die we aangeven met exp; we schrijven ook $\exp(x) = e^x$.

Uit $\log 2 > 0$ en $\log 2^n = n \log 2$ $(n \in \mathbb{N})$ volgt dat $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$, en uit $\log x = -\log \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ volgt nu dat $\lim_{x\downarrow 0} \log x = -\infty$. De functie log is dus een bijectie van $(0,\infty)$ op $(-\infty,+\infty)$, en exp is een bijectie van $(-\infty,+\infty)$ op $(0,\infty)$. Er geldt $\exp' x = \dfrac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x$.

Uit (**) volgt dat $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$ $(x,y \in \mathbb{R})$.

Tenslotte definieert men voor $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$: $a^b = e^{b \log a}$.

We memoreren nog enkele formules, die men kan afleiden als in Inf., hoofdstuk 2:

$(\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$; $(\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0) \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$;

$(\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0) \lim_{x\downarrow 0} x^a \log x = 0$;

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$; $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

§2. Enkele formules.

In deze paragraaf behandelen we enkele formules waarin de integraal een rol speelt en die men soms in toepassingen tegenkomt. Sommige formules zijn geldig onder zwakkere veronderstellingen dan de hier genoemde; de laatste zijn echter voor de toepassingen voldoende.

$f \in C^n[a,b]$ betekent: de n-de afgeleide $f^{(n)}$ van f bestaat op $[a,b]$ en is daar continu (in woorden: f is n-maal continu differenteerbaar op $[a,b]$).

(2.1) Stelling. $f,g \in C^0[a,b]$, g is tekenvast op $[a,b] \Rightarrow$
$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$ (*)

Bewijs: zij $g(x) \geq 0$ op $[a,b]$; noem $M = \max_{a\leq x\leq b} f(x)$, $m = \min_{a\leq x\leq b} f(x)$.
Er geldt

$$(\forall x \in [a,b])\ mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

dus

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Is $I(g) = 0$, dan is blijkbaar ook $I(fg) = 0$, zodat in (*) elke $\xi \in [a,b]$ voldoet. Is $I(g) > 0$, dan is $m \leq I(fg)/I(g) \leq M$; volgens de tussenwaardestelling (die zegt dat een op een segment continue functie doorlopend is) is er een $\xi \in [a,b]$ met $I(fg)/I(g) = f(\xi)$.
Is $g(x) \leq 0$ op $[a,b]$, dan schrijven we $I(fg) = -I(f \cdot (-g))$ en passen (*) toe op f en -g.

(2.2) Uit (2.1) leiden we af, door $g = 1$ te nemen: als $f \in C^0[a,b]$, dan

$$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (**).$$

(2.3) Voor de fijnproevers: er is zelfs een $\xi \in (a,b)$ waarvoor (**) geldt; ga dit na m.b.v. de in (1.7) ingevoerde functie F en de middelwaardestelling van de differentiaalrekening (stelling van het gemiddelde).

(2.4) Stelling. $f \in C^1[a,b]$, $g \in C^0[a,b]$, f' is tekenvast op $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Bewijs: definieer $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt;$$

er geldt $G' = g$ en $G(a) = 0$. Partiële integratie levert

$$\int_a^b f(x)G'(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)dx;$$

toepassing van (2.1) geeft:

$$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - G(\xi) \int_a^b f'(x)dx =$$

$$= f(b)G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)] \quad (***)$$

waaruit het gestelde volgt.

(2.5) Opmerking. Uit (2.4) leiden we af, door $g = 1$ te nemen: is $f \in C^1[a,b]$ en is f' tekenvast op $[a,b]$, dan geldt:

$$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi-a) + f(b)(b-\xi).$$

Maak zelf een plaatje!

(2.6) Stelling (van Bonnet).

$f \in C^1[a,b]$, $g \in C^0[a,b]$, $f(x) \geq 0$ en $f'(x) \leq 0$ op $[a,b] \Rightarrow$

$$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx.$$

Bewijs: we gaan uit van (***) (zie het bewijs van (2.4)).

Noem $M = \max_{a\leq x\leq b} G(x)$, $m = \min_{a\leq x\leq b} G(x)$; uit het gegeven volgt $f(b) \geq 0$ en $f(b) \leq f(a)$ (ga na), dus

$$mf(a) \leq f(b)G(b) - G(\xi)[f(b) - f(a)] \leq Mf(a).$$

Is $f(a) = 0$, dan is $f(x) = 0$ op $[a,b]$ (ga na), en dan voldoet elke $\xi \in [a,b]$. Is $f(a) \neq 0$, dan volgt het gestelde uit de doorlopendheid van G.

(2.7) Opmerking. Uit (2.6) leiden we af, door $g = 1$ te nemen: onder de voorwaarden van (2.6) geldt:

$$(\exists \xi \in [a,b]) \int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a).$$

Maak zelf een plaatje!

(2.8) De stellingen (2.1), (2.2), (2.4) en (2.6) worden middelwaardestellingen van de integraalrekening genoemd. (2.1) wordt daarbij door sommigen de eerste, door anderen de tweede middelwaardestelling genoemd.

(2.9) Is f voldoende vaak differentieerbaar op een segment dat a en x bevat, dan vinden we door partiële integratie:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)d(t-x) = f'(a)(x-a) - \int_a^x (t-x)f''(t)dt =$$

$$= f'(a)(x-a) - \tfrac{1}{2}\int_a^x f''(t)d(t-x)^2 = f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + $$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(t-x)^2 dt;$$

zo voortgaande (precies: via volledige inductie) vinden we

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Voor $x \neq a$ gaat de laatste integraal door de substitutie $u = (t-a)/(x-a)$ over in

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}[(x-a)u+a](1-u)^n du$$

hetgeen we, na keuze van $p \in [0,n]$, schrijven als

$$I = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \{f^{(n+1)}[(x-a)u+a](1-u)^{n-p}\} \cdot (1-u)^p du.$$

Wegens de tekenvastheid van $(1-u)^p$ op $[0,1]$ kunnen we (2.1) toepassen; er volgt dat er een $\theta \in [0,1]$ is met

$$I = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}[(x-a)\theta+a](1-\theta)^{n-p} \int_0^1 (1-u)^p du =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!(p+1)} f^{(n+1)}[(x-a)\theta+a](1-\theta)^{n-p}.$$

Voor de toepassingen belangrijke gevallen krijgen we door $p = n$ resp. $p = 0$ te nemen.

We vatten het bovenstaande als volgt samen:

(2.10) Stelling (formule van Taylor).

Zij f (n+1) keer continu differentieerbaar op een omgeving U van a. Zij

$$T_n(a;x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

$$R_n(a;x) = f(x) - T_n(a;x).$$

a. Voor alle $x \in U$ is

$$R_n(a;x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

b. Voor alle $x \in U$ is er een ξ tussen a en x met

$$R_n(a;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(restterm van Lagrange).

c. Voor alle $x \in U$ is er een $\theta \in [0,1]$ met

$$R_n(a;x) = \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^{n+1}$$

(restterm van Cauchy).

(2.11) Opmerkingen.

1. Schrijven we $x-a = h$, dan vinden we een schrijfwijze van $f(a+h)$ als som van een polynoom in h en een restterm.

De restterm van Cauchy is in dit geval

$$\frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!} h^{n+1}.$$

2. De restterm van Lagrange is reeds eerder behandeld, namelijk in de interpolatietheorie (theorie der polynoombenaderingen in gegeven punten).

§3. Benaderde integratie.

We houden ons in deze paragraaf bezig met het berekenen,"in een zeker aantal decimalen nauwkeurig", van integralen.

(3.1) Vooraf het volgende. In de toepassingen van de wiskunde heeft men vaak te maken met het probleem: een reëel getal a met een voorgeschreven precisie ε te benaderen met een rationaal getal, m.a.w. bij gegeven $\varepsilon > 0$ een rationaal getal r te bepalen zó dat $|a-r| < \varepsilon$. We weten dat elk reëel getal limiet van een rij rationale getallen is. Kennen we zo'n rij (r_n) met $r_n \to a$ $(n \to \infty)$, dan kunnen we a in bovengenoemde zin willekeurig dicht met rationale getallen benaderen.
Voorbeeld: van een functie f kan men soms de functiewaarden f(x) benaderen met behulp van de formule van Taylor, mits een schatting van $R_n(a;x)$ (zie (2.10)) te vinden is; geldt $\lim_{n\to\infty} R_n(a;x) = 0$, dan is een rij (r_n) als bovengenoemd te construeren.
In de computer-wiskunde laat men als benaderende getallen niet alle rationale getallen r toe: men heeft daar de beschikking over een eindige verzameling rationale getallen. Een willekeurig dichte benadering is in de computer -wiskunde dan ook in het algemeen niet mogelijk.
Een integraal is te benaderen door, zoals we in de Inf. deden, een primitieve van de integrand te bepalen, en vervolgens de waarden van deze primitieve in de eindpunten van het integratiesegment te benaderen. Daarnaast beschouwen we nu methoden der benaderde integratie (ook genoemd: numerieke integratie) volgens welke men een rechtstreekse benadering, d.w.z. een benadering zonder tussenkomst van een primitieve, van de integraal verkrijgt;

deze methoden zijn in het bijzonder nuttig wanneer geen elementaire primitieve aanwezig is.

(3.2) Polynomen zijn eenvoudig te integreren omdat ze een eenvoudige primitieve hebben. Men benadert nu een willekeurige integrand met een polynoom, m.b.v. de eerder behandelde Lagrange-interpolatie die we hier nog even memoreren:

(3.3) Stelling (betreffende Lagrange-interpolatie).
Is $f \in C^{n+1}[a,b]$ en is $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, dan is er precies één polynoom p_n van de graad $\leq n$, het n-de graads **Lagrange-interpolatiepolynoom**, waarvoor geldt

$$p_n(x_k) = f(x_k) \text{ voor alle } k \text{ met } 0 \leq k \leq n.$$

Er geldt

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k^n(x), \text{ waarin } L_k^n(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i},$$

en

$$(\forall x \in [a,b])(\exists \xi \in (a,b))f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x-x_k).$$

(3.4) We beschouwen eerst de lineaire Lagrange-interpolatie in een tweetal punten a, $a+h$. Voor $f \in C^2[a,a+h]$ is er volgens (3.3) een functie $\xi : [a,a+h] \to (a,a+h)$ zó dat

$$(\forall x \in [a,a+h])f(x) = f(a) \cdot \frac{x-a-h}{-h} + f(a+h) \cdot \frac{x-a}{h} + \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-a-h)^{*});$$

er volgt dat

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a+h)] + \tfrac{1}{2}\int_a^{a+h} f''(\xi(x))(x-a)(x-a-h)dx.$$

Uit de tekenvastheid van $(x-a)(x-a-h)$ op $[a,a+h]$ leiden we als in de bewijzen van §2 af:

$$(\exists \eta \in [a,a+h])\int_a^{a+h} f''(\xi(x))(x-a)(x-a-h)dx = f''(\eta)\int_a^{a+h} (x-a)(x-a-h)dx = -\tfrac{1}{6}f''(\eta)h^3.$$

We concluderen:

---

*) Merk op dat de functie $x \mapsto \frac{1}{2}f''(\xi(x))(x-a)(x-a-h)$ continu is, aangezien hij de som is van de functies f, $x \mapsto \frac{1}{h}f(a)(x-a-h)$ en $x \mapsto -\frac{1}{h}f(a+h)(x-a)$.

(3.5) Stelling (trapeziumregel):

Is $f \in C^2[a,a+h]$, dan is er een $\eta \in [a,a+h]$ met

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = \tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a+h)] - \tfrac{1}{12}f''(\eta)h^3 \qquad (*).$$

Men noemt (*) een (interpolatoire) kwadratuurformule; de getallen a en a+h heten steunpunten.

(3.6) Benaderde integratie op een segment $[a,b]$ kan plaatsvinden door $[a,b]$ in n (niet noodzakelijk even lange) segmenten te verdelen, en n-de graads ((n+1)-punts) Lagrangeinterpolatie te gebruiken; men verkrijgt zo een (n+1)-punts kwadratuurformule van het type

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k) + R_n$$

die men interpolatoir noemt en waarin de x_k de steunpunten, de w_k de gewichten heten. Een schatting voor R_n vindt men met behulp van (3.3) en (1.6), b:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Men kan ook op elk deelsegment de interpolatoire kwadratuurformule (*) toepassen en vervolgens sommeren; de zo verkregen kwadratuurformule noemt men repeterend. Voor een equidistante verdeling verkrijgt men zo:

(3.7) Stelling (repeterende trapeziumregel).

Is $f \in C^2[a,b]$, dan is er een $\xi \in [a,b]$ met

$$\int_a^b f(x)dx = h[\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n-1)h) + \tfrac{1}{2}f(b)] - \tfrac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)$$

waarin $h = (b-a)/n$.

Bewijs: voor $0 \leqslant k \leqslant n-1$ geldt volgens (3.5):

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx = \tfrac{1}{2}h[f(a+kh) + f(a+(k+1)h)] - \tfrac{1}{12}f''(\xi_k)h^3$$

voor zekere $\xi_k \in [a+kh, a+(k+1)h]$. Is $M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f''(x)$ en $m = \min_{a\leqslant x\leqslant b} f''(x)$, dan is $nm \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k) \leqslant nM$; gebruikmaking van de doorlopendheid van f'' op $[a,b]$ levert het gestelde.

Opgaven:

1. Bewijs:
   (i) $e^x \geq 1 + x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$
   (ii) $e^x \leq \frac{1}{1 - x}$ voor alle $x < 1$
   (iii) $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$ voor alle $x > 0$
   (iv) $(1 + x)^a \geq 1 + ax$ voor alle $x \geq -1$ en alle $a \geq 1$
   (v) $(1 + x)^a \leq 1 + ax$ voor alle $x \geq -1$ en alle $a \in (0,1]$.

2. Bewijs:
   (i) $a^u b^v \leq au + bv$ voor alle $a,b > 0$ en $u,v \geq 0$ met $u+v = 1$
   (ii) $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ voor alle $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$
   (U mag de in de infinitesimaalrekening aangenomen eigenschappen van de goniometrische funkties bekend veronderstellen).

3. Voor $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, wordt de funktie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f_a(x) = x - e^{-\frac{x}{a}}$.
   (i) Bewijs dat de vergelijking $f_a(x) = 0$ precies één reële wortel $x(a)$ heeft en dat $x(a) > 0$.
   (ii) Bewijs dat $\frac{a}{a+1} < x(a) < \frac{a+1}{a+2}$ en bereken $\lim\limits_{a \to +\infty} a(1 - x(a))$.

4. De funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(0) = 0$ en
   $$f(x) = x^2 \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} + 2} \quad \text{voor alle } x \neq 0.$$
   (i) Ga na of f continu is in 0.
   (ii) Ga na of $f'(0)$ bestaat en of f' continu is in 0.
   (iii) Ga na of $f''(0)$ bestaat en of f'' continu is in 0.

5. Bewijs: de enige differentieerbare funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f'(x) = f(x)$ voor alle x en $f(0) = 1$ is e^x.

6. Bewijs met behulp van de formule van Taylor:

(i) $2\frac{1}{2} < e < 3$

(ii) $0 < e - \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} < 10^{-6}$

(iii) e is irrationaal

7. (i) Bereken voor $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ de restterm van Lagrange $L_n(0;x)$ en de restterm van Cauchy $C_n(0;x)$.

(ii) Bewijs: als m een natuurlijk getal is met $m \geq |\alpha|$ dan is voor alle $n > m$:

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq \binom{m+n-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1} \leq 2n.n.\ldots.n \leq n^m$$

(iii) Ga na dat met behulp van deze grove schatting van $\binom{\alpha}{n}$ voor $0 < x < 1$ bewezen kan worden dat $\lim_{n\to\infty} L_n(0;x)=0$, maar dat dit mislukt voor $-1 < x < 0$.
De ongelijkheid (ii) is echter wel scherp genoeg om voor $-1 < x < 0$ te bewijzen $\lim_{n\to\infty} C_n(0;x)=0$
Toon dit aan.

8. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu.
Bewijs: als $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ en $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$ dan is $f(x) = 0$ voor alle $x \in [a,b]$.

9. Zij $f \in C^1[a,b]$, $g \in C^0[a,b]$, $f(x) \geq 0$ en $f'(x) \geq 0$ op $[a,b]$
Bewijs: $(\exists\, \xi \in [a,b])\ \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(b) \int_\xi^b g(x)dx$

10. Voor alle $a,b \in \mathbb{R}$ met $0 < a < b$ is $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{2}{a}$.
Bewijs dit (zie opmerking bij opgave 2).

11. Definieer de funktie arctan: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door
$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ en definieer het reële getal π
door $\pi = 4 \arctan 1$. Bewijs nu:

(i) $\arctan x = -\arctan(-x)$

(ii) $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ voor alle $x > 0$

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ voor alle $x < 0$

(iii) $\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

(iv) voor alle $x,y \in \mathbb{R}$ met $xy < 1$ is
$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$
Aanwijzing: voor alle $y > 0$ is het verschil van rechter- en linkerlid een op $(-\infty, \frac{1}{y})$ differentieerbare funktie van x met afgeleide 0; analoog voor $y < 0$;

(v) $\arctan \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ en $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

(vi) $\arctan \frac{1}{3}\sqrt{3} > \frac{7}{24}\sqrt{3}$ en $\arctan 1 - \arctan \frac{1}{3}\sqrt{3} < \frac{5}{8}(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})$

aanwijzing: trapeziumregel.

(vii) $3 < \pi < 3\frac{1}{5}$

<u>Opmerking</u>: het is mogelijk om uitgaande van het bovenstaande de funkties tan x, sin x en cos x te definiëren en hun eigenschappen te bewijzen; op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definieert men bijv. tan x als inverse van arctan x; via $\tan x = \tan(x+k\pi)$ zet men deze funktie voort tot $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, enz.

12. Zij $f \in C^3[a,a+2h]$.

(i) Bewijs door integratie van het tweedegraads Lagrange - interpolatie polynoom met steunpunten $a, a+h$ en $a+2h$ dat er een funktie $\eta : [0,2] \to (a,a+2h)$ is zodanig dat:

$$\int_a^{a+2h} f(x)\,dx = \frac{1}{3}h\,[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)] +$$

$$+\frac{1}{6}h^4 \int_0^2 f'''(\eta(t))t(t-1)(t-2)dt$$

(regel van Simpson)

(ii) Bewijs: als f een polynoom is van graad ≤ 3 dan is de restterm in bovenstaande formule nul; men zegt:

polynomen van graad $\leqslant 3$ worden met de regel van Simpson exact geïntegreerd.

(iii) Voor de trapeziumregel herleidden we de restterm tot een eenvoudige gedaante. Waarom mislukt hier een analoge berekening?

(iv) Bewijs dat de restterm in (i) gelijk is aan

$\frac{1}{24} h^4 [f'''(\eta_1) - f'''(\eta_2)]$ waarin $\eta_1, \eta_2 \in [a,a+2h]$.

Opmerking: er kan bewezen worden: als $f \in C^4 [a,a+2h]$ dan is de restterm gelijk aan $-\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$ voor zekere $\xi \in [a,a+2h]$.

13. Een schooltafel voor goniometrische funkties geeft getalwaarden in 5 decimalen (zie opmerking bij opgave 2).

(i) Met welke stapgrootte moet men $\sin x$ op $[0, \frac{\pi}{4}]$ tabuleren opdat de absolute fout bij lineaire interpolatie kleiner is dan $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$?

(ii) idem als (i) maar nu voor derdegraads equidistante Lagrange-interpolatie.

14. Zij $f \in C^0 [a,b]$. Bewijs: bij ieder tweetal punten $t_o, t_1 \in [a,b]$ en iedere $\alpha \in [0,1]$ is er een $\xi \in [a,b]$ met

$f(\xi) = \alpha f(t_o) + (1-\alpha) f(t_1)$.

15. Zij $f \in C^3 [a,b]$ en laat f op $[a,b]$ in tabelvorm gegeven zijn in de punten $x_k = a+kh$ waarbij $k=0,1,\ldots, n$ en $h=\frac{b-a}{n}$.

(i) De afgeleide van f in x_k is te schatten via

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} + R_1(k;h) \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

Toon aan: $R_1(k;h) = -\frac{1}{2} h f''(\xi_k)$ voor zekere $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$.

(ii) Is $f(x) = \sin x$ en $[a,b] = [0,\frac{\pi}{4}]$ dan kan men met (i) $\cos x_k$ berekenen (zie opmerking bij opgave 2)

Hoe moet men h kiezen opdat de absolute fout kleiner is dan $\frac{1}{2}.10^{-4}$?

(iii) Men kan $f'(x_k)$ ook bepalen met

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} + R_2(k;h) \qquad (k=1,2,...,n-1)$$

Toon aan: $R_2(k;h) = -\frac{1}{6} h^2 f'''(\xi)$ voor zekere $\xi \in (x_{k-1}, x_{k+1})$.

(aanw.: gebruik opgave 14).

•Onderzoek aan de hand van het gevraagde in (ii) in hoeverre deze methode de voorkeur verdient.

(iv)*Als $f \in C^5 [a,b]$ dan is er een $\xi \in (x_{k-1}, x_{k+1})$ met

$$R_2(k;h) = -\frac{1}{6} h^2 f'''(x_k) - \frac{1}{120} h^4 f^{(5)}(\xi).$$

Hoe kunt u hiervan gebruik maken om in de situatie van (ii) met nog grotere h de verlangde precisie te bereiken?

16. Zij $f \in C^2 [a,b]$ Bewijs:

(i) er is een $\xi \in [a,b]$ met

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(\tfrac{b+a}{2}) + \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi)$$

(midpoint-regel)

Aanw.: pas de formule Taylor toe in het punt $\frac{1}{2}(b+a)$.

(ii) er is een $\xi \in [a,b]$ met

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{n} f(m_i) + \frac{1}{24} (b-a) h^2 f''(\xi)$$

waarin $h = \frac{b-a}{n}$ en $m_i = a + (i-\frac{1}{2})h$

(repeterende midpoint-regel)

17. Zij $f \in C^2 [a,b]$; veronderstel dat f convex of concaaf is, d.w.z. dat f" tekenvast is.

(i) Bewijs dat $\int_a^b f(x)\,dx$ ligt tussen de door toepassing van trapeziumregel en midpoint-regel verkregen waarden.

(ii) Bewijs dat toepassing van de repeterende trapeziumregel en van de repeterende midpoint-regel voor bijv. n=1,2,4,8,... een dalende rij majoranten en een stijgende rij minoranten voor de integraal levert.

(iii) Pas het bovenstaande toe om $\log 2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ in 2 cijfers nauwkeurig te berekenen.

18. We beschouwen op $[-1,1]$ een 2-punts kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R \qquad (x_1,x_2 \in [-1,1])$$

(i) Als $x_1=-x_2$ en $w_1=w_2$ dan is de kwadratuurformule exact voor alle oneven funkties (dat zijn funkties met $f(-x)=-f(x)$). Bewijs dit.

(ii) Bepaal de steunpunten en gewichten zó dat polynomen van graad $\leqslant 3$ exact geïntegreerd worden.
Aanw.: ga na dat het voldoende is te eisen dat $1,x,x^2,x^3$ exact geïntegreerd worden.

(iii) Toon aan dat deze kwadratuurformule dezelfde is als de kwadratuurformule die ontstaat door het lineaire interpolatie polynoom van f met steunpunten x_1 en x_2 te integreren.

(iv) Benader $\log 2 = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+3}$ met behulp van de gevonden kwadratuurformule.
Vergelijk het resultaat met dat van de trapeziumregel.

19. Zij $f \in C^4[-1,1]$; laat $p(x)$ het derdegraads interpolatie polynoom zijn met $p(x_i) = f(x_i)$ en $p'(x_i) = f'(x_i)$; $i=1,2$.

(i) Bewijs: er is een funktie $\xi : [-1,1] \to (-1,1)$ met $f(x) = p(x) + \frac{1}{24} f^{(4)}(\xi(x))\,(x+1)^2(x-1)^2$ voor alle $x \in [-1,1]$

(ii) Bewijs: er is een $\eta \in [-1,1]$ met

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \frac{2}{45} f^{(4)}(\eta)$$

waarbij x_1,x_2,w_1,w_2 de in opgave 18 gevonden steunpunten en gewichten zijn.

Hoofdstuk II. Metrische ruimten.

§ 4. Eenvoudige definities en voorbeelden.

(4.1) Inleiding. Het lichaam IR der reële getallen is voorzien van een absolute waarde $x \mapsto |x|$; we definiëren op IR een afstand (afstandsfunctie) ρ als volgt: $\rho(a,b)=|a-b|$. We onderzoeken nu in dit hoofdstuk enkele eigenschappen van IR die uitsluitend in termen van deze afstand (en dus zonder gebruikmaking van, bijvoorbeeld, de optelstructuur en de ordening) kunnen worden gedefinieerd. We krijgen hiermee bijvoorbeeld inzicht in eigenschappen van continue functies (voorbeeld: waarom neemt een continue functie op een segment een grootste waarde aan?); bovendien blijken de bij dit onderzoek ingevoerde begrippen in de gehele analyse van groot belang te zijn.

Abstractie (= weglating, aftrekking) leidt ons tot de volgende definitie:

(4.2) Definitie. Een metrische ruimte is een paar (V,ρ) waarin V een verzameling is en ρ een functie $V\times V \to \mathbb{R}$ met $(\forall a,b \in V)$:

1. $\rho(a,b) \geq 0$; $\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a=b$.
2. $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ (symmetrie).
3. $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(b,c)$ (driehoeksongelijkheid).

ρ heet een metriek of afstand (op V). De elementen van V noemen we soms punten.

(4.3) Voorbeelden.

1. $V=\mathbb{R}$, $\rho(a,b) = |a-b|$.
2. $V=\mathbb{R}^n$, $\rho(a,b) = [\sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k)^2]^{\frac{1}{2}}$ (Euclidische metriek), waarin $a = (a_1, a_2,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$. Dat ρ een metriek is volgt het gemakkelijkst uit de relatie $\rho(a,b) = (a-b|a-b)^{\frac{1}{2}}$ waarin $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ het uit de lineaire algebra bekende inprodukt in $\mathbb{R}^n$ is.
3. $V=\mathbb{R}^n$, $\rho(a,b) = \sum_{k=1}^{n} |a_k-b_k|$ (a,b als in 2).

4. $V=\mathbb{R}^n$, $\rho(a,b) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k-b_k|$ (a,b als in 2) (maximummetriek).
Interpreteer zelf de voorbeelden 2 t/m 4 voor het geval n=2.
Indien niet anders wordt vermeld zullen we $\mathbb{R}^n$ steeds beschouwen als te zijn voorzien van de Euclidische metriek.

5. V is een willekeurige verzameling; $\rho(a,a) = 0$ en $\rho(a,b) = 1$ als $a,b \in V$, $a \neq b$ (triviale metriek).
6. V is de verzameling van alle continue reëelwaardige functies op een segment $X = [a,b]$; $\rho(f,g) = \max_{x \in X} |f(x)-g(x)|$.
Ziet U verband met voorbeeld 4?
7. V is de verzameling van alle begrensde reëelwaardige functies op een deelverzameling X van $\mathbb{R}$; $\rho(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x)-g(x)|$ (sup-metriek).
8. V is het deel van $\mathbb{R}^2$ bepaald door $x^2 + y^2 \leqslant 1$; $\rho(a,b) = [(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2]^{\frac{1}{2}}$ (waarin $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$).
9. V is de verzameling van alle nxn-matrices $A=(a_{ij})$; $\rho(A,B)= \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij} - b_{ij}|$. Vergelijk met voorbeeld 4, en bedenk dat er een bijectie is van V op $\mathbb{R}^{n^2}$.
Bedenk andere metrieken op V; vgl. met vb. 2 en 3.
Opmerking. Bij het bewijs dat de in de voorbeelden 6 en 7 genoemde ρ's metrieken zijn kan men gebruiken dat
$(\forall f,g,h \in V)\ (\forall x \in X)\ |f(x)-g(x)| \leqslant |f(x)-h(x)| + |g(x)-h(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f(x)-h(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)-h(x)|$.

(4.4) Het is wellicht verrassend dat we blijkbaar (zie (4.3)) van zoveel eigenschappen van $\mathbb{R}$ geabstraheerd hebben dat aan de hierdoor geïnspireerde definitie (4.2) een grote verscheidenheid aan wiskundige objecten voldoet. Dit nu blijkt voor de analyse geen bezwaar, maar integendeel een winstpunt te zijn: het is op deze wijze mogelijk om, behalve $\mathbb{R}$, ook al deze (voor de analyse belangrijke) objecten vanuit hetzelfde gezichtspunt te bestuderen. Dat dit met de nodige voorzichtigheid dient te geschieden blijkt al uit de gegeven voorbeelden, waarin de metriek vaak sterk afwijkt van of geen overeenkomst vertoont

met het uit de aanschouwing bekende begrip afstand.
Nog duidelijker blijkt dit uit de interpretatie, in de genoemde voorbeelden, van het begrip "open bol" of "bolomgeving" dat we op de volgende voor de hand liggende manier definiëren (((V,ρ) stelt steeds een metrische ruimte met metriek ρ voor):

(4.5) Definities.

a. Een open bol resp. een gesloten bol in V is een verzameling $\{x \in V \mid \rho(x,a) < \varepsilon\}$ resp. $\{x \in V \mid \rho(x,a) \leqslant \varepsilon\}$; hierin is $a \in V$ en $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.
We geven de eerste verzameling aan met $B(a;\varepsilon)$; a noemen we in beide gevallen het middelpunt.

b. Een bolomgeving van $a \in V$ is een open bol in V met middelpunt a.

c. Een gereduceerde (ook: gepuncteerde) bolomgeving van $a \in V$ is een verzameling

$$\{x \in V \mid \rho(x,a) < \varepsilon \text{ en } x \neq a\}$$

waarin $\varepsilon > 0$; we geven deze aan met $\overset{0}{B}(a;\varepsilon)$.

(4.6) Voorbeelden van bollen:

In (4.3), 1: intervallen (= open bollen) en segmenten (= gesloten bollen).
In (4.3), 2 t/m 4, n=2: resp. cirkelschijven, vierkanten en vierkanten.
In (4.3), 5: $B(a;\varepsilon) = \{a\}$ als $\varepsilon \leqslant 1$ en $B(a;\varepsilon) = V$ als $\varepsilon > 1$.

In (4.3), 6 en 7: $B(f;\varepsilon)$ is de verzameling van alle functies in V waarvan de grafiek ligt binnen een "kromme strook" ter hoogte 2ε met de grafiek van f als "as".
In (4.3), 8: ligt a op de cirkel $x^2+y^2=1$, dan is $B(a;\varepsilon)$ een gedeelte van een cirkelschijf. (Let hier in het bijzonder op de naamgeving "open" bol).
In (4.3), 9: $B(A;\varepsilon)$ is de verzameling van alle matrices in V waarvan alle matrixelementen minder dan ε van die van A verschillen.

(4.7) Geïnspireerd door intuïtieve aanschouwing van bijv. het platte vlak definiëren we nu verschillende soorten punten en deelverzamelingen van een metrische ruimte (V,ρ). Voor het onthouden van de definities kan men met goed gevolg op deze aanschouwing steunen, maar voor het gebruik ervan geldt een analogon van (4.4)!
Zij $A \subset V$.

(4.8) Definities.

a. Een inwendig punt van A is een $p \in A$ met de eigenschap:

$$(\exists \varepsilon > 0)\ B(p;\varepsilon) \subset A.$$

b. Het inwendige int(A) van A is de verzameling der inwendige punten van A.

(4.9) Definities.

a. Een randpunt van A is een $p \in V$ met de eigenschap:

$$(\forall \varepsilon > 0)\{B(p;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ en } B(p;\varepsilon) \cap \complement A \neq \emptyset\}.$$

b. De rand fr(A) van A is de verzameling der randpunten van A.

(4.10) Definitie.

Een verdichtingspunt van A is

a. een punt p van V met de eigenschap dat elke gereduceerde bolomgeving van p een punt van A bevat,

of b. een punt p van V met de eigenschap dat elke bolomgeving van p oneindig veel punten van A bevat.

Opm. Merk op dat niet geëist wordt dat $p \in A$.

Bewijs van de equivalentie van a en b:

b ⇒ a: elke $B(p;\varepsilon)$ bevat twee punten a en b van A, waarvan er minstens één, zeg b, niet p is; er volgt dat $b \in \overset{0}{B}(p;\varepsilon)$.

a ⇒ b: stel er is een $B(p;\varepsilon)$ die slechts eindig veel punten $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ van A bevat. Is $d = \min\{\rho(p;a_k) \mid 1 \leqslant k \leqslant n$ en $a_k \neq p\}$, dan is $\overset{0}{B}(p;d) \cap A = \emptyset$; tegenspraak.

(4.11) Opmerking. Volgens bovenstaande definities behoren randpunten en verdichtingspunten van A niet noodzakelijk tot A; natuurlijk zou men de definities zo kunnen wijzigen dat dit wel het geval is.

(4.12) Definitie.
Een geïsoleerd punt van A is een punt van A dat geen verdichtingspunt van A is.
Opmerking. Anders gezegd: $p \in A$ heet een geïsoleerd punt van A indien er een gereduceerde bolomgeving van p is die geen punten van A bevat.

(4.13) Definitie. A heet open indien elk punt van A inwendig punt van A is.
Opmerking. Anders gezegd: A heet open indien bij iedere $a \in A$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zó dat $B(a;\varepsilon) \subset A$.

(4.14) Definitie. De afsluiting $\bar{A}$ van A is

a. de vereniging van A en de verzameling der verdichtingspunten van A,

of b. de verzameling $\{ p \in V \mid (\forall \varepsilon > 0)\ B(p;\varepsilon) \cap \cap A \neq \emptyset \}$.

De equivalentie van a en b volgt uit de definitie van verdichtingspunt.

(4.15) Definitie. A heet gesloten indien

a. $\complement A$ open is,

of b. A al zijn verdichtingspunten bevat,

of c. $A = \bar{A}$.

Bewijs van de equivalentie van a, b en c:

a ⇒ b: zij $p \in V$ vdp. van A. Uit $p \in \complement A$ zou volgen: er is $\varepsilon > 0$ met $B(p;\varepsilon) \subset \complement A$, en dan zou p geen vdp. van A zijn; tegenspraak. Dus $p \in A$.

b ⇒ c: direct uit (4.14).

c ⇒ a: zij $p \in \complement A$. Uit $A = \bar{A}$ volgt dat p geen vdp. van A is; er is dus $\varepsilon > 0$ met $\mathring{B}(p;\varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Aangezien $p \notin A$ volgt dat $B(p;\varepsilon) \cap A = \emptyset$ ofwel $B(p;\varepsilon) \subset \complement A$, dus p is inwendig punt van $\complement A$.

(4.16) Opmerkingen.

a. Men kan bewijzen dat de volgende definitie van $\bar{A}$ equivalent is met de onder (4.14) genoemde: c. $\bar{A}$ is de kleinste gesloten deelverzameling van V die A bevat. Zie de opgaven.

b. "Niet open" en "gesloten" zijn verschillende begrippen; zo is $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ een nòch open nòch gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}$.

(4.17) Voorbeelden.

1. Een open bol $B(p;\varepsilon)$ is open in de zin van (4.13). Immers is $a \in B(p;\varepsilon)$, dan is $B(a;\varepsilon-\rho(p,a)) \subset B(p;\varepsilon)$: voor $x \in V$ met $\rho(x,a) < \varepsilon - \rho(p,a)$ geldt
$$\rho(x,p) \leqslant \rho(x,a) + \rho(a,p) < \varepsilon.$$
Op analoge wijze bewijst men: de in (4.5) gedefinieerde gesloten bol is gesloten in de zin van (4.15).

2. Het interval $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subset \mathbb{R}$ is open, het segment $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} \subset \mathbb{R}$ is gesloten. De punten (getallen) a en b zijn randpunten (de enige) en ook verdichtingspunten van zowel (a,b) als [a,b].
3. $V = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ met Euclidische metriek ρ (vgl. (4.3), vb.8). Het deel A van de cirkelschijf bepaald door $x^2 + y^2 \leqslant 1,\ (x-1)^2 + y^2 < 1$ is een open deel van V.
4. Elke deelverzameling $\{p\}$ van V bestaande uit één punt p (een "singleton") is gesloten. Immers voor elke $a \neq p$ is $B(a;\rho(a,p)) \subset \complement\{p\}$.
5. In $\mathbb{R}$ is elk punt vdp. van $\mathbb{Q}$; $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
6. Zij $A \subset \mathbb{R}$ naar boven begrensd. Is $s = \sup A$, dan geldt: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)(a > s-\varepsilon)$. We concluderen: $s \in A$ of s is vdp. van A (niet: "óf"!).

Is A gesloten, dan geldt $s \in A$; is A open, dan geldt $s \notin A$; ga na!

7. Zij (V,ρ) als in (4.3), voorbeeld 6; zij $f \in V$. De deelverzameling $A = \{g \in V \mid (\forall x \in X)\ g(x) \geq f(x)\}$ van V is gesloten.

(4.18) Stelling.

1.a. $\emptyset$ en V zijn open.

b. De vereniging van willekeurig veel open deelverzamelingen van V is open.

c. Zijn $A \subset V$ en $B \subset V$ open, dan is $A \cap B$ open.

2.a. $\emptyset$ en V zijn gesloten.

b. De doorsnede van willekeurig veel gesloten deelverzamelingen van V is gesloten.

c. Zijn $A \subset V$ en $B \subset V$ gesloten, dan is $A \cup B$ gesloten.

Bewijs.

1.a. Direct uit de definitie (4.13).

b. Zij F de vereniging van een collectie G van open deelverzamelingen van V; zij $a \in F$. Er is een $A \in G$ met $a \in A$; A is open, dus $(\exists \varepsilon > 0)\ B(a;\varepsilon) \subset A \subset F$. Er volgt dat F open is.

c. Zij $a \in A \cap B$. Er zijn bolomgevingen $B(a;\varepsilon_1)$ en $B(a;\varepsilon_2)$ met $B(a;\varepsilon_1) \subset A$ en $B(a;\varepsilon_2) \subset B$. Is $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, dan is $B(a;\varepsilon) \subset A \cap B$; er volgt dat $A \cap B$ open is.

2 volgt uit 1 door "overgang op complementen":

$$\bigcap_{A \in G} A = \complement \Big(\bigcup_{A \in G} \complement A \Big), \text{ enz.}$$

(4.19) Opmerkingen.

1. Uit (4.18) volgt: de doorsnede van eindig veel open deelverzamelingen van V is open; de vereniging van eindig veel gesloten deelverzamelingen van V is gesloten.

2. De doorsnede van willekeurig veel open deelverzamelingen van V is niet noodzakelijk open: in $\mathbb{R}$ is

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right) = \{0\}$$, een singleton.

Analoog: de vereniging van willekeurig veel gesloten deelverzamelingen van V is niet noodzakelijk gesloten.

(4.20) De in (4.17), vb.3 genoemde verzameling A "ziet er niet erg open uit": als deel van $\mathbb{R}^2$ is A niet open (en ook niet gesloten). Ter precisering: laten (V_1,ρ_1) en (V_2,ρ_2) metrische ruimten zijn met $(V_1,\rho_1) \subset (V_2,\rho_2)$, d.w.z. $V_1 \subset V_2$ en

$$\rho_2(a,b) = \rho_1(a,b) \text{ voor alle } a,b \in V_1.$$

Is $A \subset V_1$, dan zeggen we dat A <u>open is in V_i</u> als A open is als deelverzameling van (V_i,ρ_i) $(i = 1,2)$; analoog voor andere predikaten.
In (4.17), vb.3: A is open in V;A is niet open in $\mathbb{R}^2$.
We merken in dit verband op dat het begrip "complement" voorzichtig dient te worden gehanteerd: A is gesloten in $V_1 \Leftrightarrow$ het complement van A <u>in V_1</u>: $V_1 \setminus A$, is open in V_1. Hier zou de schrijfwijze $\complement A$ verwarring kunnen wekken.

(4.21) Van een deelverzameling A van een metrische ruimte (V,ρ) maken we een metrische ruimte (A,ρ^*) door te definiëren:

$$\rho^*(a,b) = \rho(a,b) \text{ voor alle } a,b \in A.$$

ρ^* heet <u>de door ρ op A geïnduceerde metriek.</u> We zullen A steeds op deze wijze als metrische ruimte interpreteren.
Merk op dat een bol in A de doorsnede van een bol in V met A is.

(4.22) <u>Stelling.</u>
a. $X \subset A$ is open in A $\Leftrightarrow$ er is $W \subset V$, W open in V, met $W \cap A = X$.
b. $X \subset A$ is gesloten in A $\Leftrightarrow$ er is $W \subset V$, W gesloten in V, met $W \cap A = X$.

<u>Bewijs:</u> <u>a</u> $\Leftarrow$: stel W open in V,$p \in W \cap A = X$; er is $\varepsilon > 0$ met $B(p;\varepsilon) \subset W$. Dan is $B^*(p;\varepsilon) = B(p;\varepsilon) \cap A \subset X$, dus X is open in A.

$\underline{a} \Rightarrow$: Stel X is open in A. Bij elke $p \in X$ is er $\varepsilon_p > 0$ met $B^*(p;\varepsilon_p) = B(p;\varepsilon_p) \cap A \subset X$. Noem

$$W = \bigcup_{p \in X} B(p;\varepsilon_p);$$

W is open in V, en

$$W \cap A = \bigcup_{p \in X} [B(p;\varepsilon_p) \cap A] = \bigcup_{p \in X} B^*(p;\varepsilon_p) = X.$$

$\underline{b}$: uit $\underline{a}$ door overgang op complementen: voor elke $X \subset A$ en $W \subset V$ geldt

$$W \cap A = A \setminus X \Leftrightarrow (V \setminus W) \cap A = X.$$

Ga na!

(4.23) <u>Voorbeeld</u>. Zij A de cirkelschijf in $\mathbb{R}^3$ gegeven door $x^2 + y^2 < 1, z = 0$
A is niet open in $\mathbb{R}^3$, maar wel in het xy-vlak: A is de doorsnede van de open eenheidsbol met dit vlak.

(4.24) <u>Opmerking.</u> De collectie van alle open deelverzamelingen van een metrische ruimte (V,ρ) noemt men een <u>topologie</u> op V.
In het algemeen kan men een verzameling op meer dan één manier tot een metrische ruimte maken, d.w.z. van een metriek voorzien; de bijbehorende topologieën behoeven niet dezelfde te zijn. Bijvoorbeeld: voorzie $\mathbb{R}^2$ van de Euclidische metriek, met bijbehorende topologie T_1, en van de triviale metriek, met bijbehorende topologie T_2. Voor een singleton $\{a\}$ geldt: $\{a\} \notin T_1$, maar $\{a\} \in T_2$ (ga na). De in deze paragraaf behandelde begrippen (en de daarop betrekking hebbende stellingen en bewijzen) kunnen vaak in termen van open verzamelingen, dus van de topologie, worden geformuleerd; men noemt ze daarom <u>topologische begrippen</u>. Bijvoorbeeld: p is vdp. van A $\Leftrightarrow$ elke open deelverzameling van V die p bevat, bevat een van p verschillend punt van A.

Verdergaande abstractie leidt tot het begrip topologische ruimte, d.i. een paar (V,T) waarin V een verzameling is, en T een collectie deelverzamelingen (die open worden genoemd) van V die de onder (4.18), 1 genoemde eigenschappen heeft. Wij zullen ons (voorlopig) beperken tot het onderzoek van metrische ruimten (anders gezegd: tot topologische ruimten waarin de topologie door een metriek wordt geïnduceerd).

§ 5. Convergentie en continuïteit.

Voor het definiëren en bestuderen van begrippen als "limiet", "convergentie" en "continuïteit" in $\mathbb{R}^n$, die we in de Inf. tegenkwamen, blijkt het voldoende van $\mathbb{R}^n$ slechts de metrische structuur te beschouwen en van de andere eigenschappen ervan te abstraheren. We komen er zo toe genoemde begrippen voor metrische ruimten te definiëren (voor de fijnproevers: we kunnen dit zelfs voor topologische ruimten doen).
(V,ρ) is een metrische ruimte; in plaats van (V,ρ) schrijven we ook wel V.

(5.1) Definities.

a. Een rij in V is een afbeelding $a : \mathbb{N} \to V$. In plaats van a schrijven we ook (a_n).

b. Zij $b \in V$. Een rij a in V heet convergent met limiet b, in formule: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ of $a_n \to b$,

indien $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n,b)=0$ (d.w.z.: indien

$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \rho\ (a_n,b) < \varepsilon$;

merk op dat "$\leq \varepsilon$" een equivalente uitspraak levert).

Belangrijke voorbeelden, (5.2) t/m (5.4):

(5.2) Voor de in (4.3), voorbeelden 2,3 en 4 (en ook 1) genoemde metrieken op $\mathbb{R}^n$ geldt: er is $c > 0$ zó dat

$$(\forall k)\ |a_k - b_k| \leq \rho(a,b) \leq c \max_{1\leq k\leq n} |a_k - b_k|.$$

Er volgt: $a^{(n)} \to b$ in $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow (\forall k)\ a_k^{(n)} \to b_k\ (n \to \infty)$ in $\mathbb{R}$.
Hierbij hebben we ter voorkoming van verwarring geschreven $a^{(n)}$ i.p.v. a_n; verder is $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$, $b =$
$= (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
In woorden: convergentie in $\mathbb{R}^n$ is equivalent met coördinaatsgewijze convergentie.

(5.3) Zij X een verzameling, V een verzameling van begrensde functies $X \to \mathbb{R}$ (vgl. (4,3),vb.6 en 7), voorzien van de sup-metriek:
$\rho(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x)-g(x)|$.

$\sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ is equivalent met: $(\forall x \in X) |f(x)-g(x)| \leqslant \varepsilon$.
We concluderen: $f_n \to f$ (in V) betekent:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in X) |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ (*).$$

Men zegt ook: (f_n) convergeert naar f uniform (gelijkmatig) op X; men spreekt daarom wel van de uniforme metriek op V.
Een verwisseling van de kwantoren in (*) levert

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ (**).$$

(**) drukt uit dat voor elke $x \in X$ de rij reële getallen $(f_n(x))$ convergent is, met limiet f(x); men zegt in dit geval:
(f_n) convergeert naar f puntsgewijs op X.
Uit uniforme convergentie van (f_n) naar f volgt puntsgewijze convergentie van (f_n) naar f;
het omgekeerde is niet waar, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt:

$X = \mathbb{R}$; $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$,

maar (f_n) convergeert niet uniform naar 0, immers

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \tfrac{1}{2} \text{ (ga na).}$$

Maak zelf een schets van de grafiek van f_n.

(5.4) Zij (V,ρ) als in (4.3), vb. 9. Als in (5.2) bewijst men:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = B \Leftrightarrow (\forall i,j)\ a_{ij}^{(n)} \to b_{ij}\ (n\to\infty).$$

Hierin is $A_n = (a_{ij}^{(n)})$, $B = (b_{ij})$. In woorden: convergentie van matrices in de maximummetriek is equivalent met elementsgewijze convergentie.

(5.5) Merk op dat voor een willekeurige metrische ruimte V de som en het produkt van twee rijen niet gedefinieerd zijn, zelfs niet als V deelverzameling is van een verzameling waarop een additieve of multiplicatieve structuur bestaat. Beschouw bijvoorbeeld $V = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Op $\mathbb{R}$ is een optelling gedefinieerd; kiezen we $a=\frac{1}{2} \in V$ en $b=\frac{3}{4} \in V$, dan geldt niet $a+b \in V$.

(5.6) Definities.

a. $A \subset V$ heet begrensd indien er een $B(p;\varepsilon)$ (met $p \in V$) is met $A \subset B(p;\varepsilon)$.

b. Een rij (a_n) in V heet begrensd indien $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ begrensd is (in V).

(5.7) Stelling. Een convergente rij is begrensd.

Bewijs: Zij $\lim_{n\to\infty} a_n = b$; er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n > N$ geldt $\rho(a_n,b) < 1$. Nu is $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B(b;\varepsilon)$ met

$$\varepsilon > \max\{\rho(a_1,b),\ \rho(a_2,b),\ldots,\ \rho(a_N,b),1\}.$$

(5.8) Stelling. $a \in V$ is verdichtingspunt van $A \subset V \Rightarrow$ er is een rij (a_n) in A met limiet a.

Bewijs: kies in elke $\overset{\circ}{B}_n(a;\frac{1}{n})$ een $a_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$; vgl. (4.10).

(5.9) Opmerking. Het omgekeerde van stelling (5.8) is niet juist; ga dit met behulp van een voorbeeld in $\mathbb{R}$ na.

Laten (V,ρ_1) en (W,ρ_2) metrische ruimten zijn.

(5.10) Definitie. Zij $a \in V$ een verdichtingspunt van V, $b \in W$, $\overset{0}{U}$ een gereduceerde bolomgeving van a, en f een afbeelding $\overset{0}{U} \to W$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

betekent: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(\overset{0}{B}(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon)$. Dat wil zeggen: bij elke $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in V$ met $0 < \rho_1(x,a) < \delta$ geldt $\rho_2(f(x),b) < \varepsilon$.
De limiet b is eenduidig bepaald; zie de opgaven.

(5.11) Definitie. Zij f een afbeelding $V \to W$, $a \in V$. f heet continu in a als

a. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$,

of b. voor iedere rij (a_n) in V met $a_n \to a$ geldt: $f(a_n) \to f(a)$.

Bewijs van de equivalentie van a en b:
a ⇒ b: zij $\varepsilon > 0$; er is $\delta > 0$ zó dat $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$.
Zij $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n > N$ geldt: $a_n \in B(a;\delta)$; voor $n > N$ geldt $f(a_n) \in B(f(a);\varepsilon)$ dus $\rho(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$.
b ⇒ a: veronderstel dat het onder a vermelde niet juist is. Dan is er $\varepsilon > 0$ zó dat (neem $\delta = \frac{1}{n}$) voor alle $n \in \mathbb{N}$ er een $a_n \in B(a;\frac{1}{n})$ is met $\rho(f(a), f(a_n)) \geq \varepsilon$; echter is $\rho(a_n,a) < \frac{1}{n}$ dus $a_n \to a$, tegenspraak.

(5.12) Opmerkingen.

1. Tussen de begrippen "limiet" en "continu" bestaat het volgende verband. Zij $a \in V$ een verdichtingspunt van V, dan geldt: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f is continu in a. Bovendien geldt dan: $\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow$ de afbeelding g, gedefinieerd door $g(x) = f(x)$ als $x \neq a$, en $g(a) = b$, is continu in a. Ga na.
2. Volgens de definitie (5.11) is elke $f: V \to W$ continu in elk geïsoleerd punt van V. Ga na.

(5.13) <u>Stelling.</u> De samenstelling van twee continue afbeeldingen is continu. Dat wil zeggen: is (X,ρ_3) een derde metrische ruimte, is $f:V \to W$ continu in $a \in V$ en is $g:W \to X$ continu in $f(a)$, dan is $g \circ f : V \to X$ continu in a.

<u>Bewijs</u>: zij $\varepsilon > 0$; er is δ_1 zó dat $g(B(f(a);\delta_1)) \subset B(g(f(a));\varepsilon)$.
Er is $\delta > 0$ zó dat $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\delta_1)$, dus

$$(g \circ f)(B(a;\delta)) \subset B(g(f(a));\varepsilon).$$

(5.14) <u>Definitie</u>. $f: V \to W$ is <u>continu</u> als

<u>a</u>. f continu is in elke $p \in V$,

of <u>b</u>. voor iedere open $A \subset W$, $\bar{f}^1(A)$ open is (in V).

<u>Bewijs</u> van de equivalentie van <u>a</u> en <u>b</u>:

<u>a</u> ⇒ <u>b</u>: Zij A open, zij $p \in \bar{f}^1(A)$, dus $f(p) \in A$. A is open, dus er is $B(f(p);\varepsilon) \subset A$; volgens (5.11), <u>a</u> is er $\delta > 0$ met $f(B(p;\delta)) \subset B(f(p);\varepsilon)$. Er volgt dat $B(p;\delta) \subset \bar{f}^1(A)$, dus $\bar{f}^1(A)$ is open.

<u>b</u> ⇒ <u>a</u> : zij $p \in V$ en zij $\varepsilon > 0$. $B(f(p);\varepsilon)$ is open, dus $\bar{f}^1(B(f(p);\varepsilon))$ (die p bevat) is open: er is $B(p;\delta) \subset$ $\subset \bar{f}^1(B(f(p);\varepsilon))$ ofwel
$f(B(p;\delta)) \subset B(f(p);\varepsilon)$.

<u>Opmerking.</u> Men gaat gemakkelijk na dat de volgende definitie equivalent is met <u>a</u> en <u>b</u> : <u>c</u>. $f:V \to W$ is continu indien, voor iedere gesloten $A \subset W$, $\bar{f}^1(A)$ gesloten is (in V).

(5.15) <u>Definitie.</u> Zij $A \subset V$. $f:V \to W$ heet <u>continu in A</u> (ook: op A) als $f \mid A : A \to W$ continu is.
Hierbij is A voorzien van de geïnduceerde metriek (zie (4.21)), terwijl $f \mid A$ de restrictie van f tot A is, gedefinieerd door $(f \mid A)(x) = f(x) (x \in A)$.

(5.16) Ga na:

<u>1</u>°. Als $f : V \to W$ continu is, dan is f continu in elke $A \subset V$.

<u>2</u>°. Is $p \in V$, dan is elke $f: V \to W$ continu in $\{p\}$ (gebruik (5.15) en (5.12),<u>2</u>). Maak onderscheid tussen het element p van V en de deelverzameling $\{p\}$ van V!

(5.17) Voorbeelden. Zij (V,ρ) een metrische ruimte.

1. Zij f een afbeelding $V \to \mathbb{R}^n$. We schrijven $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$, hetgeen betekent dat $f(a) = (f_1(a),f_2(a),\dots,f_n(a))$ $(a \in V)$; elke f_k is een funktie $V \to \mathbb{R}$. Als in (5.2) blijkt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall k) \lim_{x \to a} f_k(x) = b_k$$

en dus ook: f is continu $\Leftrightarrow$ alle f_k zijn continu.

2. Noem de in (4.3), vb. 9 ingevoerde matrixruimte $M(n,n)$. Zij f een afbeelding $V \to M(n,n)$; we schrijven $f=(f_{ij})$, hetgeen betekent dat $f(a) = (f_{ij}(a))$ $(a \in V)$. Naar analogie van vb. 1 geldt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = B \Leftrightarrow (\forall i,j) \lim_{x \to a} f_{ij}(x) = b_{ij}$$

en dus ook: f is continu $\Leftrightarrow$ alle f_{ij} zijn continu.

(5.18) Opmerking. De begrippen "limiet", "convergent" en "continu" zijn topologische begrippen (vgl. (4.24)).

(5.19) Voor de fijnproevers

In (5.10) e.v. bestudeerden we limieten van afbeeldingen tussen metrische ruimten. Een rij in een metrische ruimte V is ook als afbeelding tussen metrische ruimten te definiëren, namelijk als afbeelding $\mathbb{N} \to V$ waarin $\mathbb{N}$ voorzien is van de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde (de "natuurlijke") metriek; daarbij is echter het enige voor rijen interessante limietgeval in $\mathbb{N}$, namelijk $\lim_{n \to \infty} a_n$,

niet als in (5.10) te interpreteren. Die interpretatie is wel als volgt mogelijk:

Beschouw de verzameling $\mathbb{N}^*$, bestaande uit $\mathbb{N}$ en het symbool $+\infty$; voorzie $\mathbb{N}^*$ van een metriek als volgt: definieer voor $n \neq +\infty$, $m \neq +\infty$:

$$\rho(m,n) = \rho(n,m) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{m} & \text{als } m > n \\ 0 & \text{als } m=n \end{cases}$$

en verder $\rho(+\infty,m)= \rho(m,+\infty) = \frac{1}{m}$ als $m \neq +\infty$, $\rho(+\infty,+\infty)=0$

(ga na dat dit een metriek is!). Ga na dat een bolomgeving

van $+\infty$ in $\mathbb{N}^*$ een verzameling $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n > N\}$ is, waarin $N \in \mathbb{N}$; hierbij zetten we de lineaire ordening op $\mathbb{N}$ voort tot $\mathbb{N}^*$ door te definiëren: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $n < +\infty$.
Nu geldt: $\lim_{n \to \infty} a_n = b$ (volgens (5.1)) $\Leftrightarrow$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = b$ in $\mathbb{N}^*$ (volgens (5.10)).
Op analoge wijze kunnen we zinnen als " $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ " en " $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ " (voor functies $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) definiëren in termen van metrische ruimten. Beschouw daartoe de verzameling $\mathbb{R}^*$, bestaande uit $\mathbb{R}$ en de symbolen $+\infty$ en $-\infty$, met lineaire ordening ($-\infty < a < +\infty$ voor alle $a \in \mathbb{R}$). Voorzie $\mathbb{R}^*$ als volgt van een metriek: definieer $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ door $\phi(-\infty) = -1$, $\phi(+\infty) = +1$,

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{als } x \in \mathbb{R},\ x > 0 \\[2ex] \dfrac{-x^2}{x^2+1} & \text{als } x \in \mathbb{R},\ x < 0 \end{cases}$$

ϕ is continu en strikt monotoon stijgend, en $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \phi(x) = -1$. Definieer vervolgens $\rho(a,a) = 0$ en $\rho(a,b) = \rho(b,a) = \phi(b) - \phi(a)$ als $a,b \in \mathbb{R}^*$, $b > a$. Ga na dat ρ een metriek op $\mathbb{R}^*$ is (er zijn nog vele andere mogelijkheden; probeer zelf $\phi(x)=\arctan x$). Wat zijn de bolomgevingen van $-\infty$ en $+\infty$?

Elke afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kunnen we interpreteren als een afbeelding $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, waarbij $\mathbb{R}$ als gereduceerde bolomgeving van $-\infty$ (in $\mathbb{R}^*$) wordt beschouwd: $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid 0 < \rho(x,-\infty) < 2\}$.
De bovengenoemde limieten kunnen nu als limiet in de zin van (5.10) worden geïnterpreteerd door $V=W=\mathbb{R}^*$ te nemen.
In het zojuist besprokene is iets van de unificerende tendens (zoveel mogelijk "alles onder één noemer brengen") in de tegenwoordige wiskunde naar voren gekomen, die nauw verwant is aan de tendens tot abstractie en die er (mede) oorzaak van is dat de wiskunde niet in gelijke mate onoverzichtelijk is geworden als zij in omvang is toegenomen. Beide tendensen zijn een gevolg van het gebruik van wat men vroeger "de axiomatische methode" noemde; deze methode is zo ingeburgerd in de wiskunde dat men haar nu nauwelijks met een afzonderlijke naam aangeeft.

Opgaven:

1. (V,ρ) is een metrische ruimte. Bewijs:
   (i) Voor alle $a,b,c \in V$ geldt $|\rho(a,b) - \rho(b,c)| \leq \rho(a,c)$.
   (ii) Voor alle $a,b,c,d \in V$ geldt $|\rho(a,b) - \rho(c,d)| \leq \rho(a,c) + \rho(b,d)$.

2. (V,ρ) is een metrische ruimte; $d : V \times V \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$. Bewijs dat d een metriek is op V.

3. Laten ρ_1 en ρ_2 metrieken zijn op V.
   (i) Bewijs dat $d : V \times V \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $d(x,y) = \max(\rho_1(x,y),\rho_2(x,y))$ een metriek op V is.
   (ii) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $f : V \times V \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x,y) = \min(\rho_1(x,y),\rho_2(x,y))$ niet altijd een metriek op V is.

4. Bewijs dat op $C^0[a,b]$ door $\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ een metriek ρ gedefinieerd wordt (gebruik opgave I,8).

5* Bewijs dat door $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ een inprodukt op de lineaire ruimte $C^0[a,b]$ wordt gedefinieerd.
Leid hieruit af dat door $\rho(f,g) = \{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}}$ een metriek ρ op $C^0[a,b]$ wordt gedefinieerd.

6. V is een verzameling en $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ is een afbeelding met de eigenschappen:
   a. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   b. $\rho(z,x) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ voor alle $x,y,z \in V$
   Bewijs dat (V,ρ) een metrische ruimte is.

7. We definieren $\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ door:
   a. voor alle $x \in \mathbb{Z}$ is $\rho(x,x) = 0$
   b. voor alle $x,y \in \mathbb{Z}$ met $x \neq y$ is $\rho(x,y) = 2^{-k}$, waarbij k het aantal factoren 2 in $|x-y|$ is:

k is het eenduidig bepaalde niet-negatieve gehele getal waarvoor er een $m \in \mathbb{N}$ is met $|x-y| = m\,2^k$ en g.g.d. $(2,m) = 1$.
Bewijs dat ρ een metriek op $\mathbb{Z}$ is.

8. Laat V voorzien zijn van de triviale metriek.
Bewijs:
(i) iedere deelverzameling van V is open.
(ii) iedere deelverzameling van V is gesloten.
(iii) V bevat geen verdichtingspunten.

9. Zij $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. Bewijs:
$A \cap \mathbb{Q}$ is open en gesloten in $\mathbb{Q}$ maar noch open noch gesloten in $\mathbb{R}$.

10. V is een metrische ruimte; $A \subset V$.
$\mathcal{L}$ is de collectie van alle open deelverzamelingen van V die bevat zijn in A: $\mathcal{L} = \{L \mid L \subset A$ en L is open$\}$.
Bewijs:
(i) int (A) is open
(ii) $A \subset B \Rightarrow \text{int}(A) \subset \text{int}(B)$
(iii) A is open $\Leftrightarrow A = \text{int}(A)$
(iv) $L \in \mathcal{L} \Rightarrow L \subset \text{int}(A)$
(v) $\text{int}(A) \in \mathcal{L}$
(vi) int(A) is de grootste open deelverzameling van V die bevat is in A.
(vii) $\text{int}(A) = \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$

11. V is een metrische ruimte; $A \subset V$.
$\mathcal{L}$ is de collectie van alle gesloten deelverzamelingen van V die A omvatten: $\mathcal{L} = \{L \mid A \subset L \subset V$ en L is gesloten$\}$.
Bewijs:
(i) $\overline{A}$ is gesloten
(ii) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
(iii) $L \in \mathcal{L} \Rightarrow \overline{A} \subset L$
(iv) $\overline{A} \in \mathcal{L}$
(v) $\overline{A}$ is de kleinste gesloten deelverzameling van V die A omvat
(vi) $\overline{A} = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$

12. Bewijs:

(i) $\overline{A} = \complement\, \mathrm{int}(\complement A)$ en $\mathrm{int}(A) = \complement(\overline{\complement A})$

(ii) $\mathrm{fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$

(iii) $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}(A) = A \cup \mathrm{fr}(A)$

(iv) $\mathrm{int}(A) = A \setminus \mathrm{fr}(A)$

(v) $\mathrm{fr}(A)$ is gesloten

13. Bewijs:

(i) een vdp. van A dat niet tot A behoort is een randpunt van A

(ii) een vdp. van A dat geen inwendig punt van A is, is een randpunt van A

(iii) een randpunt van A dat niet tot A behoort is een vdp. van A

(iv) een randpunt van A dat geen vdp. is van A is een geïsoleerd punt van A

(v) de afsluiting van A is de vereniging van de verzameling der vdp. van A en die der geïsoleerde punten van A

14. Bewijs:

(i) p is geen vdp. van A $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)\ B(p;\varepsilon) \cap A \subset \{p\}$

(ii) p is geïsoleerd punt van A $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)\ B(p;\varepsilon) \cap A = \{p\}$

15. Bewijs:

p is vdp. van A $\Leftrightarrow$ iedere open deelverzameling van V, die p bevat, bevat een van p verschillend punt van A.

16. Zij $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \vee x = 2\}$. We vatten V op als metrische ruimte met de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde metriek. Geef voorbeelden van deelverzamelingen A van V waaruit blijkt dat de volgende uitspraken onjuist zijn:

(i) een inwendig punt van A is een vdp. van A

(ii) een geïsoleerd punt van A is een randpunt van A

(iii) een vdp. van A is een randpunt van A

(iv) een randpunt van A is een geïsoleerd punt van A

Laat zien dat ook de volgende uitspraken onjuist zijn:

(v) $\mathrm{fr}(B(p;\varepsilon)) = \{x \in V \mid \rho(x,p) = \varepsilon\}$

(vi) $\overline{B(p;\varepsilon)} = \{x \in V \mid \rho(x,p) \leq \varepsilon\}$

17. V is een metrische ruimte; $a,b \in V$.
Bewijs: $\{x \mid \rho(x,a) = \rho(x,b)\}$ is een gesloten verzameling.

18. V is een metrische ruimte; $A,B \subset V$.
Bewijs:
(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(ii) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; de omgekeerde inclusie is niet juist voor alle $A,B \subset V$.
(iii) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$
(iv) $\mathrm{int}(A \cup B) \supset \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$; de omgekeerde inclusie is niet juist voor alle $A,B \subset V$.

19.* V is een metrische ruimte; $A,B \subset V$.
Bewijs:
(i) $\mathrm{fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{fr}(A)$
(ii) $\mathrm{fr}(\mathrm{int}(A)) \subset \mathrm{fr}(A)$
(iii) $\mathrm{fr}(A \cup B) \subset \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{fr}(B)$
(iv) in (i), (ii) en (iii) zijn de omgekeerde inclusies niet juist voor alle $A,B \subset V$.
(v) $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi \Rightarrow \mathrm{fr}(A \cup B) = \mathrm{fr}(A) \cup \mathrm{fr}(B)$

20. Voor deelverzamelingen A,B van een metrische ruimte (V,ρ) definieert men de afstand d door $d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x,y)$; is A een singleton $\{a\}$ dan schrijft men gewoonlijk $d(a,B)$ i.p.v. $d(\{a\},B)$.
(i) Bewijs: als A gesloten is en $a \notin A$ dan is $d(a,A) > 0$.
(ii) Geef een voorbeeld van twee disjuncte verzamelingen met afstand nul.
(iii) Geef een voorbeeld van gesloten verzamelingen A en B zó dat er geen $x \in A$ en $y \in B$ zijn met $d(A,B) = \rho(x,y)$.
Aanw.: zoek geschikte niet begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$.

21. V is een metrische ruimte; $A \subset B \subset V$.
Bewijs:
(i) A is open in V $\Rightarrow$ A is open in B

(ii) A is open in B en B is open in V $\Rightarrow$ A is open in V
(iii) A is gesloten in V $\Rightarrow$ A is gesloten in B
(iv) A is gesloten in B en B is gesloten in V $\Rightarrow$ A is gesloten in V

22. Zij $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \text{ en } n \in \mathbb{N}\}$
Ga na of A open is in $(0,1]$, gesloten is in $(0,1]$, open is in $[0,1]$, gesloten is in $[0,1]$.

23. Voor iedere deelverzameling A van $\mathbb{R}$ geldt $A \cap \mathbb{Z}$ is open in $\mathbb{Z}$.
Bewijs dit.

24. In $\mathbb{R}^2$ met Euclidische metriek beschouwen we de deelverzamelingen
$A_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$
$A_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
$A_3 = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$
$A_4 = \mathbb{R}^2 \setminus A_3$
De op A_i geïnduceerde metriek geven we aan met ρ_i^*.
Geef nauwkeurig in een tekening aan welke punten behoren tot
$B((2,0);2)$ in (A_1, ρ_1^*);
$B((2,0);2)$ in (A_4, ρ_4^*);
$B((1,0);2)$ in (A_3, ρ_3^*).
Ga na:
A_1 is open in A_4, maar niet open in $\mathbb{R}^2$;
A_2 is gesloten in A_4, maar niet gesloten in $\mathbb{R}^2$.

25. De in (4.3) voorbeeld 2,3 en 4 gedefinieerde metrieken geven alle dezelfde topologie op $\mathbb{R}^n$. Bewijs dit.

26. (i) Zij $V = C^0[-1,1]$, voorzien van de maximum-metriek (zie (4.3) voorb. 6). Bewijs dat $A = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ gesloten is.
(ii) Zij $V = C^0[-1,1]$, voorzien van de in opgave 4 gedefinieerde metriek.
Bewijs dat $A = \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ niet gesloten is (aanwijzing: $\bar{A}$ bevat de constante funkties).
Moraal: de bij deze metrieken behorende topologieën zijn verschillend.

27*. Zij $V = C^0[a,b]$, voorzien van de maximum-metriek (zie (4.3) voorb. 6). De afbeelding $\phi : V \to \mathbb{R}$ is gegeven door
$\phi(f) = \int_a^b f(x)dx$.
Bewijs dat ϕ continu is.

28. V is een metrische ruimte; $a \in V$.
Bewijs dat $f : V \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = \rho(a,x)$, continu is.

29. (V,ρ) is een metrische ruimte.
(i) Bewijs dat d, gedefinieerd door $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \rho(x_1,y_1) + \rho(x_2,y_2)$, een metriek is op $V \times V$; vgl. (4.3) voorbeeld 3.
(ii) Bewijs dat met deze metriek op $V \times V$ geldt:
$\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ is continu (gebruik opgave 1 (ii)).

30. V is een metrische ruimte; $p \in V$; $\varepsilon > 0$.
Bewijs: $\{x \mid \rho(x,p) \leq \varepsilon\}$ is een gesloten verzameling die $\overline{B(p;\varepsilon)}$ bevat; vgl. opgave 16 (vi).

31. Laat $\mathbb{Z}$ voorzien zijn van de in opgave 7 gedefinieerde metriek. Bewijs dat in deze metriek geldt
$\lim_{n\to\infty} (1+2+2^2+.....+2^n) = -1$.

32. V en W zijn metrische ruimten. Bewijs:
$f : V \to W$ is continu dan en slechts dan als, voor iedere gesloten $A \subset W$, $f^{-1}(A)$ gesloten is in V.

33. V en W zijn metrische ruimten. Van de afbeeldingen $f : V \to W$ en $g : W \to V$ is gegeven dat $(f \circ g)(x) = x$ voor alle $x \in W$. Bewijs:
(i) f is surjectief en g is injectief.
(ii) voor alle $X \subset W$ is $f^{-1}(X) \cap g(W) = g(X)$
(iii) als voor iedere open deelverzameling $X \subset W$ geldt dat $g(X)$ open is in V dan is f continu in $g(W)$.

34. V en W zijn metrische ruimten, $a \in V$ is een verdichtingspunt van V en f is een afbeelding $V \to W$.
Bewijs: er is hoogstens één $b \in W$ met $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

35. Gegeven de metrische ruimten U, V, W en de afbeeldingen $f : U \to V$ en $g : V \to W$. Zij a een vdp. van U, b een vdp. van V, $\lim_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim_{x \to b} g(x) = c$.
Bewijs:
(i) als er een $\delta > 0$ is zó dat $b \notin f(\overset{o}{B}(a;\delta))$ dan is
$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$
(ii) als g continu is in b dan is
$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = c$

36. De funkties $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$
(i) Bewijs dat (f_n) puntsgewijs naar een funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergeert.
(ii) Bewijs dat (f_n) op $\mathbb{R}$ niet uniform naar f convergeert.

37. De funkties $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_n(x) = x^n(1-x)$.
Bewijs dat (f_n) op $[0,1]$ uniform naar 0 convergeert.

38. De funkties $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_n(x) = nx(1-x)^n$.
Bewijs dat (f_n) op $[0,1]$ puntsgewijs maar niet uniform naar 0 convergeert.

39. Bij de funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschouwen we de verzameling $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$.
Gegeven is: $A \neq \phi$, $0 \notin \overline{A}$ en A is begrensd.
De funkties s_n, t_n en u_n zijn gedefinieerd door $s_n(x) = f(x+n)$, $t_n(x) = f(\frac{x}{n})$ en $u_n(x) = f(nx)$.
Bewijs:
(i) De rijen (s_n), (t_n) en (u_n) convergeren puntsgewijs naar 0.
(ii) De rijen (s_n), (t_n) en (u_n) convergeren niet uniform naar 0.

§6. Volledige metrische ruimten.

(6.1) Definitie. Een Cauchy-rij (of fundamentaalrij) in een metrische ruimte (V,ρ) is een rij (a_n) in V met de eigenschap:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n,m > N)\rho(a_n,a_m) < \varepsilon$$

of, hiermee equivalent:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p > 0)\rho(a_{n+p},a_n) < \varepsilon.$$

(6.2) Stelling. Een convergente rij is een Cauchy-rij.
Bewijs: zij $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ in een metrische ruimte (V,ρ), en zij $\varepsilon > 0$. Er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n > N$ geldt: $\rho(a_n,b) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor alle $n,m > N$ geldt nu $\rho(a_n,a_m) \leqslant \rho(a_n,b) + \rho(a_m,b) < \varepsilon$.

(6.3) Stelling. Een Cauchy-rij is begrensd.
Bewijs: zij (a_n) een Cauchy-rij in een metrische ruimte (V,ρ). Er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n > N$ geldt: $\rho(a_n,a_N) < 1$. Dus is

$$\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset B(a_N;\varepsilon)$$

als $\varepsilon > \max\{\rho(a_1,a_N),\rho(a_2,a_N),\ldots,\rho(a_{N-1},a_N),1\}$.

(6.4) Definitie. Een metrische ruimte (V,ρ) heet volledig (of compleet) als iedere Cauchy-rij in V convergent is.

(6.5) Opmerkingen.

1. Volledige metrische ruimten hebben voor de toepassingen belangrijke eigenschappen; U treft er in deze paragraaf enige van aan.
2. Volledigheid van een metrische ruimte stelt ons in staat te bewijzen dat een rij convergent is zonder de limiet te kennen.
3. "Cauchy-rij" en "volledig" zijn geen topologische begrippen: ze kunnen niet worden geformuleerd uitsluitend in termen van open verzamelingen. Er bestaat dan ook geen analogon van in willekeurige topologische ruimten.

(6.6) Voorbeelden.

1. $\mathbb{Q}$ is niet volledig: er is een rij rationale getallen die in $\mathbb{R}$ convergeert naar $\sqrt{2}$.

2. $\mathbb{R}$ is volledig ("limietstelling van Cauchy").
3. $\mathbb{R}^n$ is volledig voor elk van de in (4.3) genoemde metrieken: Uit $\rho(a^{(n)},a^{(m)}) < \varepsilon$ volgt: $(\forall_k)|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}| < \varepsilon$ (vgl. (5.2)). Is $a^{(n)}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^n$, dan is dus, voor alle k, $(a_k^{(n)})$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$; noem de limiet hiervan a_k. Volgens (5.2) geldt nu $a^{(n)} \to a$ in $\mathbb{R}^n$, met $a = (a_1,a_2,\dots,a_n)$.
4. Analoog: m.b.v. (5.4) bewijst men dat de matrixruimte $M(n,n)$ (zie (5.17), vb. 2) volledig is.
5. Zij X een verzameling, V de verzameling van alle begrensde functies $X \to \mathbb{R}$ (vgl. (5.3)), voorzien van de sup-metriek. V is volledig: is (f_n) een Cauchy-rij in V, dan volgt uit
$$(\forall x \in X)|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \rho(f_n,f_m)$$
dat, voor elke $x \in X$, de rij $(f_n(x))$ convergent is; noem de limiet $f(x)$.
We bewijzen eerst dat de hierdoor gedefinieerde functie $f : X \to \mathbb{R}$ begrensd is: er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n > N$ geldt
$$(\forall x \in X)|f_n(x) - f_N(x)| \leqslant \rho(f_n,f_N) < 1;$$
limietovergang $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$ levert: $(\forall x)|f(x) - f_N(x)| \leqslant 1$ dus $(\forall x)|f(x)| \leqslant |f_N(x)| + 1$. Uit de begrensdheid van f_N volgt die van f: we concluderen dat $f \in V$.
Tenslotte bewijzen we dat $f_n \to f$ in V: bij elke $\varepsilon > 0$ is er $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n > N$ en alle $p > 0$ geldt
$$(\forall x \in X)|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon;$$
limietovergang $p \to \infty$ (in $\mathbb{R}$) levert: $(\forall x \in X)|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ en dus: $(\forall n > N)\rho(f,f_n) \leqslant \varepsilon$. Hieruit volgt het gestelde.
Opmerking. In woorden: een uniforme Cauchy-rij begrensde functies convergeert uniform naar een begrensde limiet (-functie).

(6.7) Stelling. Een gesloten deel van een volledige metrische ruimte is volledig.

Bewijs: zij (V,ρ) volledig, $A \subset V$ gesloten, (a_n) een Cauchy-rij in A; (a_n) is ook een Cauchy-rij in V en heeft dus een limiet, zeg a. We zijn klaar als we bewijzen dat $a \in A$. Welnu, bestaat $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ uit eindig veel elementen, dan $(\exists n)$ $(a = a_n)$ (ga na), dus dan geldt $a \in A$;

is $\{a_n | a_n \in \mathbb{N}\}$ niet eindig, dan is a vdp. van A (ga na), en dan volgt $a \in A$ uit de geslotenheid van A.

(6.8) Voorbeelden.

1. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}$ volgt die van elk segment $[a,b]$.
2. Uit de volledigheid van $\mathbb{R}^n$ volgt die van elk blok $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ (zie de opgaven).

(6.9) Een eerste voor de toepassingen belangrijke eigenschap van volledige metrische ruimten komt tot uiting in de volgende stelling. Laten (V,ρ_1) en (W,ρ_2) metrische ruimten zijn, $a \in V$ een verdichtingspunt van V, $\overset{0}{U}$ een gereduceerde bolomgeving van a, en f een afbeelding $\overset{0}{U} \to W$.

Stelling (limietstelling van Cauchy). Is W volledig, dan geldt: $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow$ voor elke $\varepsilon > 0$ is er een gereduceerde omgeving $\overset{0}{B}(a;\delta)$ van a zó dat voor alle $x,y \in \overset{0}{B}(a;\delta)$ geldt: $\rho_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Bewijs:

$\Rightarrow$: zij $\lim_{x\to a} f(x) = p$, en zij $\varepsilon > 0$. Er is een $\overset{0}{B}(a;\delta)$ zó dat voor alle $x \in \overset{0}{B}(a;\delta)$ geldt: $\rho_2(f(x),p) < \frac{\varepsilon}{2}$. Voor alle $x,y \in \overset{0}{B}(a;\delta)$ is nu $\rho_2(f(x),f(y)) \leqslant \rho_2(f(x),p) + \rho_2(f(y),p) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: we bewijzen eerst: er is $p \in W$ zó dat voor alle rijen (a_n) in V met $a_n \neq a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en met limiet a de rij $(f(a_n))$ convergeert naar p. Zij (a_n) zo'n rij. Zij $\varepsilon > 0$, en zij $\delta > 0$ zó dat $(\forall x,y \in \overset{0}{B}(a;\delta))\ \rho_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$. Er is N zó dat $(\forall n > N) a_n \in \overset{0}{B}(a;\delta)$. Voor alle $n,m > N$ is dus $\rho_2(f(a_n),f(a_m)) < \varepsilon$; er volgt dat $(f(a_n))$ een Cauchy-rij is, die wegens de volledigheid van W een limiet, zeg p, heeft.

Is (b_n) een tweede rij in V met $b_n \neq a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en met limiet a, dan heeft $(f(b_n))$ ook een limiet, zeg m. Er is N zó dat $(\forall n > N)\rho_2(f(a_n),p) < \varepsilon$ én $\rho_2(f(b_n),m) < \varepsilon$ én $\rho_2(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon$; er volgt dat voor $n > N$ geldt

$$\rho_2(p,m) \leqslant \rho_2(p,f(a_n)) + \rho_2(f(a_n), f(b_n)) + \rho_2(f(b_n),m) < 3\varepsilon.$$

Aangezien ε willekeurig is volgt dat $\rho_2(p,m) = 0$, dus $p = m$.

Veronderstel nu dat <u>niet</u> geldt $\lim_{x\to a} f(x) = p$. Dan geldt:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)\ f(\overset{o}{B}(a;\delta)) \not\subset B(p;\varepsilon).$$

Kies bij deze ε : $\delta = \frac{1}{n}$; we concluderen dat er een rij (a_n) bestaat met $0 < \rho_1(a,a_n) < \frac{1}{n}$ (dus $a_n \to a$ en $a_n \neq a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$) en $\rho_2(p,f(a_n)) \geq \varepsilon$, dus $f(a_n) \not\to p$. Tegenspraak.

(6.10) We nemen $V = \mathbb{R}$. Van (6.9) bestaat het volgende analogon voor functies $f : \mathbb{R} \to W$:

<u>Stelling</u>. Is W volledig, dan geldt: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ bestaat $\Leftrightarrow$ voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $p \in \mathbb{R}$ zó dat voor alle $x > p$, $y > p$ geldt $\rho_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Analoge uitspraak betreffende het bestaan van $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Het bewijs van deze stelling kan worden gegeven overeenkomstig het bewijs van (6.9). De fijnproevers doen het anders: ze merken op, door "$x\to+\infty$" resp. "$x\to-\infty$" in $\mathbb{R}^*$ (vgl. (5.19)) te interpreteren, dat (6.10) een bijzonder geval is van (6.9).

<u>Toepassing: oneigenlijke integralen</u>.

(6.11) <u>Definities</u>.

<u>a</u>. Zij $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ continu. We definiëren de <u>oneigenlijke integraal</u> van f over $[a,b]$ als de limiet (als deze bestaat als reëel getal)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \text{ te schrijven als } \int_a^b f(x)dx \quad (*).$$

Analoge definitie van de oneigenlijke integraal van f over $[a,b]$ als $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continu is. (Is $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu, dan noemen we de integraal van f over $[a,b]$ wel een <u>eigenlijke</u> integraal).

<u>b</u>. Zij $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continu. De <u>oneigenlijke integraal</u> van f over $[a,+\infty)$ is de limiet (als deze bestaat als reëel getal)

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^p f(x)dx, \text{ te schrijven als } \int_a^\infty f(x)dx \quad (**).$$

Analoge definitie van de oneigenlijke integraal van f over $(-\infty,a]$ als $f : (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ continu is.

c. Indien in a of b de limiet bestaat noemen we de integraal (*) resp. (**) convergent, anders divergent.

d. Is $I \subset \mathbb{R}$ een vereniging van eindig veel (open, gesloten of half-open) intervallen of halfrechten $I_1, I_2, \ldots, I_n$ die hoogstens eindpunten gemeen hebben, terwijl de eigenlijke of oneigenlijke integraal van de reële functie f over elke I_k bestaat, dan definiëren we

$$\int_I f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} f(x)dx.$$

Men kan bewijzen: is I ook de vereniging van eindig veel intervallen of halfrechten $J_1, J_2, \ldots, J_m$ met dezelfde eigenschappen, dan is

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} f(x)dx = \sum_{p=1}^{m} \int_{J_p} f(x)dx.$$

De gegeven definitie is dus onafhankelijk van de keuze van $I_1, I_2, \ldots, I_n$.

(6.12) Opmerking. Is $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu, dan is de integraal van f over $[a,b]$ gelijk aan de oneigenlijke integraal van f over $[a,b]$; dit volgt uit (1.7) (continuïteit van de integraal als functie van zijn boven - of ondergrens).

(6.13) Voorbeelden.

1. Zij $a > 0$.

$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ convergeert dan en slechts dan als $p > 1$.

$\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ convergeert dan en slechts dan als $p < 1$.

$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ is divergent voor alle $p \in \mathbb{R}$.

2. Analoog: is $0 < a < b$, dan zijn

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \quad \text{en} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

convergent dan en slechts dan als $p < 1$.

3. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ is divergent, hoewel $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right)$ bestaat; men noemt het laatste wel de hoofdwaarde van $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$. Analoog: de hoofdwaarde van de divergente oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ is $\lim_{p \to +\infty} \int_{-p}^{+p} \frac{x}{x^2+1} dx = 0$.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$. Voor de berekening moeten we $\mathbb{R}$ splitsen in intervallen $(-\infty, a]$ en $[a, +\infty)$; merk op dat het antwoord onafhankelijk is van de keuze van de splitsing.

(6.14) Stelling. Is $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ continu en bestaat $\lim_{x \downarrow a} f(x)$ als reëel getal, dan is $\int_a^b f(x)dx$ convergent.

Bewijs: noem $\lim_{x \downarrow a} f(x) = m$. Definieer $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ door $f^*(a) = m$, $f^*(x) = f(x)$ als $x \in (a,b]$; f^* is continu. Volgens (6.13) geldt nu

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f^*(x)dx = \int_a^b f^*(x)dx.$$

Gevolg. Zij $a < c < b$ en zij f continu overal op $[a,b]$ behalve in c, terwijl in c linker- en rechterlimiet van f bestaan (men zegt dat f in c een sprongdiscontinuïteit heeft). Dan is

$$\int_a^b f(x)dx$$

convergent.

(6.15) Voorbeeld. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx$ is convergent, want de integrand is continu op $(0,1]$ terwijl $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

(6.16) Stelling.

a. Laten $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ en $g : (a,b] \to \mathbb{R}$ continu zijn, terwijl:

1. $g(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a,b]$;
2. $\int_a^b g(x)dx$ is convergent;
3. er is $p > a$ zó dat $|f(x)| \leq g(x)$ voor alle x met $a < x \leq p$.

Dan is $\int_a^b f(x)dx$ convergent.

b. Laten $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ en $g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ continu zijn, terwijl:

1. $g(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,+\infty)$;
2. $\int_a^\infty g(x)dx$ is convergent;
3. er is $p > a$ zó dat $|f(x)| \leq g(x)$ voor alle $x \geq p$.

Dan is $\int_a^\infty f(x)dx$ convergent.

Bewijs: we bewijzen alleen a; het bewijs van b verloopt geheel analoog.

Definieer $F : (a,b] \to \mathbb{R}$ en $G : (a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt, \quad G(x) = \int_x^b g(t)dt.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Uit de convergentie van $\int_a^b g(t)dt$ volgt dat $\lim_{x \downarrow a} G(x)$ bestaat. Volgens (6.9) (neem hierin $V = [a,b]$) is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle x,y met $a < x < y < a+\delta$ geldt $|G(x)-G(y)| < \varepsilon$. Noem $\delta_1 = \min(\delta, p-a)$; voor alle x,y met $a < x < y < a+\delta_1$ geldt

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \int_x^y g(t)dt =$$

$$= |G(x)-G(y)| < \varepsilon.$$

Nogmaals toepassen van (6.9) levert het gestelde.

(6.17) Opmerkingen.

a. Er gelden analoge stellingen voor oneigenlijke integralen van op $[a,b)$ resp. $(-\infty,a]$ continue functies.

b. Uit het bewijs van (6.16) blijkt dat uit de gegevens van (6.16) volgt dat niet alleen $\int_a^b f(t)dt$, maar zelfs $\int_a^b |f(t)|dt$ convergent is; men noemt de eerste integraal in dit geval absoluut convergent. Volgens (6.16) geldt: is $\int_a^b f(x)dx$ absoluut convergent, dan is hij convergent; ga na (neem $g(x) = |f(x)|$). Later zullen we zien dat uit convergentie geen absolute convergentie volgt.

c. Aan de eisen van (6.16), a resp. b is voldaan indien er een continue $h : (a,b] \to \mathbb{R}$ resp. $h : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ is met:

1°. $h(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in (a,b]$ resp. $x \in [a,+\infty)$;

2°. $\int_a^b h(x)dx$ resp. $\int_a^\infty h(x)dx$ is convergent;

3°. $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = m$ resp. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = m$ bestaat als reëel getal. Men neme dan namelijk $g(x) = (|m| + 1)h(x)$.

(6.18) <u>Voorbeelden</u>:

1. $\int_1^\infty \frac{x}{x^5+1}\,dx$ is convergent, want $\frac{x}{x^5+1} \leqslant \frac{1}{x^4}$ $(x > 0)$ en $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ is convergent (vgl. (6.13)).

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{2x\sqrt{x}-1}$ is convergent, want $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x\sqrt{x}-1} \Big/ \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

3. $\int_0^\infty e^{-x}x^a dx$ is convergent voor alle $a > -1$.
Immers $\lim_{x\downarrow 0} e^{-x}x^a/x^a = 1$, terwijl $\int_0^1 x^a dx$ convergent is voor alle $a > -1$, en $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}x^a/x^{-2} = 0$ voor alle $a \in \mathbb{R}$, terwijl $\int_1^\infty x^{-2}\,dx$ convergent is.

4. $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx$ is convergent voor alle $a > -1$ en $b > -1$: schrijf de integraal als $\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$ en vergelijk met $\int_0^{\frac{1}{2}} x^a dx$ resp. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^b dx$.

5. $\int_0^1 \log x\,dx$ is convergent, want de integraal is gelijk aan
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} [x \log x - x]_\varepsilon^1 = -1.$$
Het kan ook anders: uit $\lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}\log x = 0$ en de convergentie van $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ volgt de convergentie van $\int_0^1 \log x\,dx$.

6. Uit (6.16) volgt: zijn $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ en $g : (a,b] \to \mathbb{R}$ continu, en geldt:
1°. er is $p > a$ zó dat $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ voor alle $x \in (a,p]$, en
2°. $\int_a^b g(x)dx$ is divergent, dan is $\int_a^b f(x)dx$ divergent.
Zo is $\int_0^1 \frac{\log x}{x}\,dx$ divergent. Weliswaar is $\log x \leqslant 0$ voor $x \in (0,1]$, maar voor $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ is $\frac{-\log x}{x} \geqslant \frac{\log 2}{x}$. Uit de divergentie van $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ volgt die van $\int_0^1 \frac{\log 2}{x}dx$ (ga na);

op grond van het bovenstaande concluderen we nu dat $\int_0^1 \frac{-\log x}{x}dx$ en dus ook $\int_0^1 \frac{\log x}{x}dx$ (ga na!) divergent is.

7. $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x}dx$ is divergent (vgl. (6.15)!), want voor alle $x \geqslant p > 0$ geldt $\frac{\log(1+x)}{x} \geqslant \frac{\log(1+p)}{x}$ terwijl $\int_p^\infty \frac{dx}{x}$ divergent is; pas nu een (door U zelf te formuleren) analogon van het in voorbeeld 6 vermelde gevolg van (6.16) toe.

(6.19) Van de voor $\mathbb{R}$ geldende stelling betreffende een intervalschakeling geldt het volgende analogon voor volledige metrische ruimten. Onder de diameter van een deelverzameling A van een metrische ruimte V verstaan we $d(A) = \sup\{\rho(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$.

Stelling (neststelling).
Zij (V,ρ) een volledige metrische ruimte, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ een dalende rij ("nest") niet-lege gesloten deelverzamelingen van V met $d(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.
Dan bestaat $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ uit precies één punt.

Bewijs: kies in elke A_n een punt a_n. Is $d(A_n) < \varepsilon$ voor alle $n > N$, dan is $\rho(a_{n+p},a_n) < \varepsilon$ voor alle $n > N$ en alle $p > 0$. Er volgt dat (a_n) een Cauchy-rij is; deze heeft wegens de volledigheid van V een limiet, die we a noemen. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is $a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ een rij in A_n met limiet a; uit de geslotenheid der A_n volgt dat $(\forall n) a \in A_n$, dus $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Uit $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ volgt $(\forall n) b \in A_n$, dus $(\forall n)\rho(a,b) \leqslant d(A_n)$; uit $d(A_n) \to 0$ volgt nu $a = b$.

(6.20) Zij V een metrische ruimte. Onder een contractie van V (of: contraherende afbeelding van V in zichzelf) verstaan we een $f : V \to V$ waarvoor geldt: er is een $c \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant c < 1$ (de contractiefactor) zó dat

$$\rho(f(x),f(y)) \leqslant c\rho(x,y) \text{ voor alle } x \in V,\ y \in V.$$

Een contractie van V is een continue afbeelding $V \to V$ (ga na). Onder een vast punt of dekpunt van een afbeelding $f : V \to V$ verstaan we een $x \in V$ met $f(x) = x$. We behandelen nu een tweede voor de toepassingen belangrijke stelling:

(6.21) Stelling (contractiestelling of vaste puntenstelling of dekpuntstelling).

Een contractie van een volledige metrische ruimte heeft precies één vast punt.

Bewijs: zij (V,ρ) een volledige metrische ruimte, en f een contractie van V met contractiefactor c. Zij $a \in V$; beschouw de rij (a_n) in V, gedefinieerd door $a_0 = a$, $a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1), \ldots,$ $a_n = f(a_{n-1}), \ldots$ Uit

$$(\forall n \in \mathbb{N})\rho(a_{n+1}, a_n) = \rho(f(a_n), f(a_{n-1})) \leqslant c\rho(a_n, a_{n-1})$$

volgt door volledige inductie:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\rho(a_{n+1}, a_n) \leqslant c^n \rho(a_1, a_0)$$

en dus

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p > 0)\rho(a_{n+p}, a_n) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \rho(a_{n+i}, a_{n+i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} c^{n+i-1}\right)\rho(a_1, a_0) = \frac{c^n - c^{n+p}}{1-c}\rho(a_1, a_0) \leqslant \frac{c^n}{1-c}\rho(a_1, a_0).$$

Uit $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ volgt nu dat de rij (a_n) een Cauchy-rij is (ga na); deze rij heeft dus een limiet, die we a noemen. Uit $(\forall n)a_{n+1} = f(a_n)$ volgt, wegens de continuïteit van f, door limietovergang $n \to \infty$: $a = f(a)$, zodat a een vast punt van f is. Is ook b een vast punt van f, dan geldt $\rho(a,b) = \rho(f(a), f(b)) \leqslant$ $\leqslant c\rho(a,b)$, dus $\rho(a,b) = 0$ ofwel $a = b$.

(6.22) Laat f een contractie van een volledige metrische ruimte zijn. De contractiestelling leert ons dat de vergelijking $f(x) = x$ precies één oplossing, zeg a, heeft. Uit het bewijs van (6.21) blijkt bovendien hoe we, uitgaande van een willekeurige startwaarde a_0, een naar a convergente rij kunnen contrueren, namelijk met de methode van succesieve substitutie (ook methode der successieve approximatie genoemd): men bepaalt $a_1 = f(a_0)$, vervolgens $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, enz.; men spreekt hier van een constructief existentiebewijs. De zo gevonden benaderingen a_n zijn beter al naar n groter is, want $\rho(a,a_n) = \rho(f(a), f(a_{n-1})) \leqslant$ $c\rho(a, a_{n-1})$; uit deze formule volgt dat $\rho(a,a_n) \leqslant c^n\rho(a,a_0)$, waaruit blijkt dat een willekeurige precisie bereikt kan worden.

De genoemde benaderingsmethode (die we kortweg aangeven met $a_{n+1} = f(a_n)$) is een voorbeeld van een <u>iteratief proces</u>, dat is een methode volgens welke men uit een of meer benaderingen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ van een grootheid x een nieuwe benadering x_{n+1} bepaalt, vervolgens met behulp van de zo gevonden benaderingen $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ een benadering x_{n+2}, enz.

(6.23) Zij (V,ρ) een metrische ruimte, $A \subset V$, f een afbeelding $V \to V$. Het iteratieve proces $a_{n+1} = f(a_n)$ heet <u>convergent op A</u> indien de rij (a_n), waarin $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n \geqslant 0)$, convergent is voor elke startwaarde $a_0 \in A$.

(6.24) <u>Voorbeelden</u>.

<u>1</u>. $V = \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ (dus $f(x) = \frac{1}{2}x$). Uit $a_n = 2^{-n}a_0$ (via volledige inductie) volgt dat dit proces convergent is op V. Merk op dat V volledig is, en dat f een contractie van V is (vgl. (6.21)).

<u>2</u>. $V = \mathbb{R}$, $a_{n+1} = a_n^2$ (dus $f(x) = x^2$). Uit $a_{n+1} = (a_0)^{2^{n+1}}$ volgt dat dit proces niet convergent is op V (neem bijv. $a_0 = 2$). Op $A = (-1,+1)$ is het wèl convergent: voor $a_0 \in (-1,+1)$ geldt $\lim_{n\to\infty} (a_0)^{2^{n+1}} = 0$.
Merk op dat A niet volledig is, en dat $f|A$ geen contractie van A is (bepaal $|f(\frac{1}{2}) - f(\frac{3}{4})|$).

<u>Toepassing: Iteratieve processen in $\mathbb{R}$</u>.

(6.25) De volgende stelling (met opmerking!) leert ons iets omtrent de toepassingsmogelijkheden van de contractiestelling.

<u>Stelling</u>. Is I een interval in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, $f(I) \subset I$, en is er $c \in \mathbb{R}$ met $0 \leqslant c < 1$ zó dat $|f'(x)| \leqslant c$ voor alle $x \in I$, dan is f een contractie van I.
<u>Bewijs</u>: volgens de middelwaardestelling van de differentiaalrekening is er bij alle $x,y \in I$ een ξ tussen x en y met $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$ dus

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leqslant c|x-y|.$$

Opmerking. Het iteratieve proces $a_{n+1} = f(a_n)$ heeft een eenvoudige meetkundige interpretatie die te vinden is door in één figuur de krommen $y = x$ en $y = f(x)$ te schetsen. Ga met behulp van zo'n figuur na dat een differentieerbare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ waarvoor op een interval $I \subset \mathbb{R}$ geldt $|f'(x)| \leq c < 1$ niet noodzakelijk een vast punt heeft.

(6.26) We beschouwen nu problemen die verband houden met het benaderen van oplossingen van vergelijkingen $F(x) = 0$, waarin F een functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is. We tranformeren daartoe de vergelijking $F(x) = 0$ in een daarmee equivalente van de vorm $f(x) = x$, waarbij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zó gekozen wordt dat $a_{n+1} = f(a_n)$ een convergent iteratief proces (van successieve substitutie) op $\mathbb{R}$ of een geschikt deel van $\mathbb{R}$ is.
Is a een wortel van $F(x) = 0$, dan ligt het in verband met (6.21) en (6.25) voor de hand te proberen een f te nemen waarvoor op een omgeving I van a geldt $|f'(x)| \leq c$, voor zekere $c < 1$.
Belangrijk geval: nemen we f zó dat $f'(a) = 0$, terwijl f' continu is in a, dan is er zo'n I.
Is $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zó dat $\phi(x) \neq 0$ in een omgeving I van a, dan is de vergelijking $F(x) = 0$ op I equivalent met de vergelijking $f(x) = x$ waarin $f(x) = x + \phi(x)F(x)$. Bij de methode van Newton-Raphson (NR) kiest men $\phi(x) = -1/F'(x)$ op een omgeving I van a waarop geldt $F'(x) \neq 0$ (zodat dan $f'(a) = 0$); men beschouwt dus het iteratieve proces

$$(*) \quad a_{n+1} = a_n - \frac{F(a_n)}{F'(a_n)}.$$

Hiervoor geldt de volgende stelling:

(6.27) Stelling (NR-proces, I).
Zij $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(a) = 0$. Is F tweemaal continu differentieerbaar in een omgeving van a en is $F'(a) \neq 0$, dan is het NR-proces $(*)$ lokaal convergent, d.w.z. dan is er een omgeving van a waarop $(*)$ convergeert, met limiet a.
Bewijs: uit de gegevens volgt dat er een omgeving I van a is waarop geldt $F'(x) \neq 0$ terwijl F'' continu is op I.

Definieer $f : I \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)};$$

op I is f continu differentieerbaar, terwijl $f(a) = a$ en $f'(a) = 0$. Er is een omgeving $J \subset I$ van a zó dat $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ op J. Voor alle $x \in J$ geldt: er is een $\xi \in J$ met

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$$

dus

(**) $|f(x) - a| \leq \frac{1}{2}|x-a|$;

er volgt dat $f(x) \in J$. Voor elke $a_0 \in J$ wordt dus door $a_{n+1} = f(a_n) (n \geq 0)$ een rij (a_n) in J gedefinieerd; hiervoor geldt wegens (**)

$$|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$$

en dus (volledige inductie) $|a_{n+1} - a| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}|a_0 - a|$, waaruit volgt $a_n \to a$.

(6.28) Opmerking. In het bewijs van (6.27) hebben we geen gebruik gemaakt van de contractiestelling, aangezien in (6.27) de existentie van een vast punt van f gegeven is.

(6.29) De NR-methode heeft een eenvoudige meetkundige interpretatie: a_{n+1} is het snijpunt van de raaklijn in $(a_n, F(a_n))$ aan de grafiek van $y = F(x)$ met de x-as. Interpreteer meetkundig (6.27). Ga in een figuur na dat de NR-methode lokaal kan convergeren zonder op $\mathbb{R}$ convergent te zijn.
Geïnspireerd door meetkundige beschouwingen komen we tot een tweede stelling betreffende de convergentie van de NR-methode:

(6.30) Stelling (NR-proces,II).
Zij $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(a) = 0$. Is F tweemaal continu differentieerbaar in een omgeving van a en is $F'(a) \neq 0$, dan is het NR-proces (*) convergent, met limiet a, op elk interval I met eindpunt a waarop geldt $F(x) \neq 0$ en $F(x)F''(x) \geq 0$.
Bewijs: uit $F(x) \neq 0$ op I en de continuïteit van F volgt dat F op I tekenvast is. We onderscheiden nu de gevallen: I ligt links of rechts van a, $F(x) > 0$ of < 0 op I.

We geven het bewijs voor het volgende geval (de andere gevallen kunnen op analoge wijze bewezen worden):
I ligt rechts van a, $F(x) > 0$ op I. Dan is $F'(a) > 0$ (ga na) en $F''(x) \geq 0$ op I; F' is dus monotoon stijgend op I, en er volgt dat $F'(x) > 0$ op I.
Voor alle $x \in I$ is er een $\xi \in (a,x)$ met

$$0 = F(a) = F(x) + (a-x)F'(x) + \tfrac{1}{2}(a-x)^2 F''(\xi)$$

(formule van Taylor) ofwel

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = a + \tfrac{1}{2}(x-a)^2 \frac{F''(\xi)}{F'(x)}$$

en dus geldt $a \leq f(x) < x$. Het iteratieve proces $a_{n+1} = f(a_n)$ is dus voor iedere $a_0 \in I$ gedefinieerd, en de bijbehorende rij (a_n) is monotoon dalend en naar beneden begrensd en heeft dus een limiet, zeg b (met $b \geq a$). Door limietovergang $n \to \infty$ in $a_{n+1} = a_n - F(a_n)/F'(a_n)$ volgt dat $F(b) = 0$; met $F(x) > 0$ op I volgt nu dat $b = a$.

Opgaven:

40. Ga na of de volgende integralen convergent zijn:

(i) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x\sqrt{x}}\,dx$;

(ii) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$;

(iii) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$;

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$; (zie opmerking bij opgave I,2)

(v) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

(vi) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$;

(vii) $\int_0^{\infty} x^{-2}e^{-x^{-2}}\,dx$;

(viii) $\int_0^{\infty} e^{-x^3}\,dx$;

(ix) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^3}\,dx$.

41. Bewijs dat de volgende integralen convergent zijn (zie opmerking bij opgave I,2):

(i) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$ voor alle $a \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx$ voor alle $a,b \in \mathbb{R}$;

(iii) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\log(1+x)}\,dx$ voor alle $a \in \mathbb{R}$ (vgl. opgave I,10).

42. Onderzoek voor welke reële waarden van p de volgende integralen convergent resp. divergent zijn:

(i) $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$;

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{(1+2x)(1+x)^2}\,dx$.

43. (i) Bewijs: als f en g over $[a,b]$ oneigenlijk integreerbaar zijn dan geldt dit ook voor f+g en αf ($\alpha \in \mathbb{R}$), terwijl

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

en

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

Ga na dat dit ook geldt als $[a,b]$ vervangen wordt door $[a,\infty)$ of $(-\infty,b]$.

(ii) Laat zien dat $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$ convergent kan zijn, terwijl $\int_a^b f(x)dx$ en $\int_a^b g(x)dx$ divergent zijn; neem bijv. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en $g(x) = \frac{-1}{x+2}$ op $[0,\infty)$.

(iii) Bereken $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

44. (i) Zij f continu op (a,b) en zij $\phi : (c,d) \to (a,b)$ continu differentieerbaar, terwijl $\lim_{x \downarrow c} \phi(x) = a$ en $\lim_{x \uparrow d} \phi(x) = b$.
Bewijs:
als $\int_a^b f(x)dx$ convergent is dan is $\int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)dx$ convergent en $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(x))\phi'(x)dx$.
Ga na dat dit ook geldt als a of c door $-\infty$ vervangen worden of als b of d door $+\infty$ vervangen worden.

(ii) Bewijs dat voor $a > -1$ en $b > -1$ de integralen

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^{a+b+2}}\,dx,\quad \int_0^1 x^a(1-x)^b dx \text{ en } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\sin x)^{2a+1}(\cos x)^{2b+1}dx$$

convergeren en aan elkaar gelijk zijn.

45. Bewijs dat de volgende integralen voor alle $n \in \mathbb{N}$ convergent zijn en bereken de waarden voor $n = 2$:

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$;

(ii) $\int_0^1 \log^n x\, dx$.

46. Bewijs dat de "integralen van Fresnel"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx$$

convergeren (substitueer $x^2 = y$).

47. Zij V een begrensde metrische ruimte die meer dan één punt bevat. Bewijs: als f een contractie van V is dan is f niet surjectief.

48. Laat de verzameling V voorzien zijn van de triviale metriek. Bewijs dat de zo gedefinieerde metrische ruimte volledig is.

49. Ga na welke van de volgende afbeeldingen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contraherend zijn:
(i) $f_1(x) = \sqrt{|x|}$;
(ii) $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$;
(iii) $f_3(x) = ax + b$;
(iv) $f_4(x) = \sin x$ (zie opmerking bij opgave I,2).

50. Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = z^2$.
Bewijs:
(i) de restrictie van f tot $\{z \mid |z| \leqslant \frac{1}{3}\}$ is een contractie;
(ii) de restrictie van f tot $\{z \mid |z| \leqslant \frac{1}{2}\}$ is geen contractie.

51. In (6.8) voorbeeld 2 wordt gebruikt: in $\mathbb{R}^n$ is een blok
$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (\forall i)\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ gesloten.
Bewijs deze bewering.

*52. V is een metrische ruimte; C(V) is de verzameling van alle continue functies $V \to \mathbb{R}$, voorzien van de sup-metriek. Bewijs dat C(V) volledig is.

53. In vroeger jaren konden computers niet delen (behalve door een gehele macht van 2). De inverse van een getal $a > 0$ werd dan iteratief bepaald, zonder gebruikmaking van delingen, als volgt:

(i) Geef het NR-proces ter bepaling van de wortel van $F(x) = 0$, waarin $F(x) = 1 - \frac{1}{ax}$, in zodanige vorm dat geen delingen worden gebruikt (voor convergentie: zie (iii)).

(ii) Itereren volgens (i) met startwaarde $x_0 \neq 0$ levert een rij iteranden (x_n).
Bewijs dat $(x_n - \frac{1}{a}) = -a(x_{n-1} - \frac{1}{a})^2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat na k "Newtonslagen" de relatieve fout gelijk is aan $(ax_0 - 1)^{2^k}$.
(als α een benadering is van b dan verstaat men onder relatieve fout het getal $\left|\frac{b-\alpha}{b}\right|$).

(iii) Bewijs dat het proces (i) convergent is op $(0,\frac{2}{a})$ en divergent is op $(-\infty,0)$ en op $(\frac{2}{a},\infty)$.
Ga dit ook na in een figuur.

(iv) We passen het proces toe met $a \in [1,2]$, waarbij we als startwaarde nemen het getal $x_0(a)$ dat verkregen wordt door lineaire interpolatie van $\frac{1}{x}$ op de steunpunten 1 en 2. Bewijs dat deze startwaarde in het convergentie-interval ligt en bereken de kleinste waarde van k waarvoor de relatieve fout voor alle $a \in [1,2]$ kleiner is dan 10^{-13}.

54. Zij $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ een polynoom met reële coëfficienten. Ter vereenvoudiging nemen we aan dat alle nulpunten van f reëel zijn. We willen met behulp van de NR-methode de nulpunten van f op de computer berekenen.

(i) De algoritme $s_0 = a_0$
$$s_i = s_{i-1}p + a_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$
geeft $s_n = f(p)$. Bewijs dit.

(ii) Bewijs: $f(x) = (s_0 x^{n-1} + s_1 x^{n-2} + \ldots + s_{n-1})(x-p) + s_n$.

(iii) De algoritme $q_0 = s_0$
$$q_i = q_{i-1}p + s_i \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$$
geeft $q_{n-1} = f'(p)$. Bewijs dit.
Hoeveel vermenigvuldigingen kost nu de berekening van $\frac{f(p)}{f'(p)}$?

(iv) Bewijs: alle nulpunten van f" zijn reëel en liggen tussen het kleinste en het grootste nulpunt van f.

(v) Zij x_0 een bovengrens voor de absolute waarden van de nulpunten van f. Toon aan dat met startwaarde x_0 resp. $-x_0$ het NR-proces monotoon naar het grootste resp. het kleinste nulpunt van f convergeert. (Maak een plaatje!)

(vi) Bewijs dat voor de in (v) genoemde bovengrens genomen kan worden $x_0 = [(\frac{a_1}{a_0})^2 - 2\frac{a_2}{a_0}]^{\frac{1}{2}}$.
Aanwijzing: voor de nulpunten w_i geldt $\sum_{i=1}^{n} w_i = -\frac{a_1}{a_0}$ en
$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} w_i w_j = \frac{a_2}{a_0}$ (ga na).

(vii) Laat zien hoe men, nadat een nulpunt gevonden is, met behulp van (ii) een lineaire factor kan uitdelen en hoe men door bovenstaand proces te herhalen de overige nulpunten kan berekenen.

55. Zij $a > 0$. We beschouwen twee iteratieve processen om $\sqrt{a}$ te benaderen: het bij de vergelijking $x^2-a = 0$ behorende NR-proces $x_{i+1} = f(x_i)$ en het proces $y_{i+1} = g(y_i)$, waarbij $g(t) = t+\frac{a^2-t^4}{4a^2}$.
Bewijs:

(i) $f(t) = \frac{1}{2}(t+\frac{a}{t})$ en $x_{i+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_i-\sqrt{a})^2}{2x_i}$ voor alle $i \geqslant 0$.

(ii) Voor iedere $x_i > 0$ is er een ξ_i tussen x_i en $\sqrt{a}$ met $x_{i+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_i - \sqrt{a})(1 - \frac{a}{\xi_i^2})$.

(iii) Op $(0,\infty)$ convergeert het proces $x_{i+1} = f(x_i)$ naar $\sqrt{a}$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-\sqrt{a}}{x-\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$ en (mits $x_0 > 0$ en $x_0 \neq \sqrt{a}$)
$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}-\sqrt{a}}{(x_i-\sqrt{a})^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.
Ga na wat dit in de praktijk betekent door x_1, x_2 en x_3 te berekenen voor $a = 1$, $x_0 = 10^6$ en voor $a = 1$, $x_0 = 1{,}1$.

(v) Voor iedere y_i is er een η_i tussen y_i en $\sqrt{a}$ met $y_{i+1} - \sqrt{a} = (y_i - \sqrt{a})(1 - \frac{\eta_i^3}{a^2})$.

(vi) Als $a > 1$ dan is er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat het proces $y_{i+1} = g(y_i)$ op $B(\sqrt{a};\varepsilon)$ naar $\sqrt{a}$ convergeert.

(vii) Als $a > 1$ en als x_0 en y_0 zo gekozen worden dat beide processen naar $\sqrt{a}$ convergeren, dan is
$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}-\sqrt{a}}{x_i-\sqrt{a}} : \frac{y_{i+1}-\sqrt{a}}{y_i-\sqrt{a}} = 0$. Hieruit volgt dat bij geschikt gekozen gemeenschappelijke startwaarde met het eerste proces minder iteratieslagen nodig zijn om een gegeven precisie te bereiken dan met het tweede; ga dit na.

§7. Continue invarianten.

(7.1) In (4.1) kondigden we aan met behulp van de theorie der metrische ruimten meer licht te zullen werpen op de eigenschappen van continue functies. We doen dat in deze paragraaf,en wel door het invoeren en onderzoeken van twee belangrijke continue invarianten, dan zijn eigenschappen, toe te kennen aan deelverzamelingen van metrische ruimten, waarvoor geldt: zijn V en W metrische ruimten, heeft $A \subset V$ die eigenschap en is $f : V \to W$ continu, dan heeft f(A) ook die eigenschap (men zegt wel: f behoudt die eigenschap). Ga met behulp van voorbeelden, waarin $V \subset \mathbb{R}$ en $W \subset \mathbb{R}$, na dat "openheid", "geslotenheid", "begrensdheid", "volledigheid", "een verdichtingspunt zijn", "een inwendig punt zijn", "een randpunt zijn" en "een geïsoleerd punt zijn" geen continue invaranten zijn.
Volgens (5.11) is "een convergente rij zijn" een continue invariant. "Een Cauchy-rij zijn" is geen continue invariant; ga na.
Zij (V,ρ) een metrische ruimte, $A \subset V$.

(7.2) Definities. A heet een brok als A open en gesloten (in V) is. Triviale brokken van V zijn V en $\emptyset$; alle andere brokken heten echte brokken.

(7.3) Definities.
a. V heet samenhangend als V geen echte brokken bevat.
b. A heet samenhangend als A als metrische ruimte samenhangend is.

(7.4) Samenhang van A is gedefinieerd in termen van de door V op A geïnduceerde metriek. Het is ook mogelijk dit uitsluitend in termen van de metriek op V te doen:

Stelling. A is samenhangend $\Leftrightarrow$ er zijn geen P, $Q \subset V$ met

$$(*)\quad \begin{cases} P \text{ en } Q \text{ zijn open in } V \\ A \cap P \neq \emptyset,\ A \cap Q \neq \emptyset \\ A \subset P \cup Q \\ A \cap P \cap Q = \emptyset. \end{cases}$$

Bewijs (uit het ingerijmde):
$\Rightarrow$: stel er zijn zulke P en Q. Als volgt blijkt dat $A \cap P$ dan een echt brok in A is, tegenspraak:
Uit $A \cap P = A$ zou volgen $A \cap Q = A \cap P \cap Q = \emptyset$, tegenspraak; gegeven is verder $A \cap P \neq \emptyset$. We concluderen dat $A \cap P$ een echt deel van A is (d.w.z.: $A \cap P \subset A$ en $A \cap P \neq \emptyset$, $A \cap P \neq A$).
Volgens (4.22) is $A \cap P$ open in A; $A \cap P$ is ook gesloten in A, want uit (*) volgt dat $A\setminus(A \cap P) = A \cap Q$ (ga na).
$\Leftarrow$: stel A is niet samenhangend; A heeft dan een echt brok B, en ook $C = A\setminus B$ is dan een echt brok van A. Volgens (4.22) zijn er $P, Q \subset V$, beide open in V, met $P \cap A = B$, $Q \cap A = C$. P en Q voldoen aan (*) (ga na); tegenspraak.

(7.5) Voorbeelden.
1. In $\mathbb{R}$ is $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x^2 \leqslant 9\}$ niet samenhangend.
2. In $\mathbb{R}$ is $\mathbb{Q}$ niet samenhangend.

(7.6) Stelling. De samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn:
$\emptyset$, singletons $\{a\}$, intervallen (a,b), segmenten $[a,b]$, half open intervallen $(a,b]$, $[a,b)$, open halfrechten $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$, gesloten halfrechten $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$, en $\mathbb{R}$.
Bewijs:
a. We bewijzen eerst dat alle in de stelling genoemde deelverzamelingen samenhangend zijn:
Zij A zo'n deelverzameling. Dat $\emptyset$ en een singleton samenhangend zijn volgt direkt uit def. (7.3); veronderstel dus dat A minstens twee elementen heeft. Merk op dat geldt:
als $x \in A$, $y \in A$, $x < z < y$, dan $z \in A$.
Zij P een echt brok van A; dan is ook $Q = A\setminus P$ een echt brok van A. $P \neq Q$ en $Q \neq \emptyset$; stel $a \in P$, $b \in Q$, $a < b$. Noem

$$p = \sup \{x \in P \mid x < b\} \quad (**).$$

Er geldt $[a,b] \subset A$. Uit de openheid van P en Q in A volgt dat er $\varepsilon > 0$ is met $[a,a+\varepsilon) \subset P$, $(b-\varepsilon,b] \subset Q$. We concluderen dat $a < p < b$. Uit $p \in P$ zou volgen, weer volgens de openheid van P in A: $(\exists \varepsilon > 0)\ (p-\varepsilon,p+\varepsilon) \subset P$, hetgeen in strijd is met (**).
Op analoge wijze is $p \in Q$ in strijd met (**).

Er volgt dat $p \notin P \cup Q = A$; tegenspraak.
We concluderen dat A geen echte brokken bevat.
b. Laat $A \subset \mathbb{R}$ samenhangend zijn, en laat A minstens twee elementen bevatten. Noem $a = \inf A$, $b = \sup A$; er geldt $a < b$.
Stel er is $c \in (a,b)$ met $c \notin A$; dan is $\{x \in A | x < c\}$ een echt brok van A (ga na), tegenspraak. We concluderen dat $(a,b) \subset A$.
Door onderscheiding van de gevallen $a = -\infty$, $a > -\infty$, $b = +\infty$, $b < +\infty$, $a \in A$, $a \notin A$, $b \in A$, $b \notin A$ zien we dat elke samenhangende $A \subset \mathbb{R}$ een van de in de stelling genoemde deelverzamelingen is.

(7.7) Stelling. "Samenhang" is een continue invariant: is W een metrische ruimte, is $A \subset V$ samenhangend en is $f : V \to W$ continu, dan is $f(A)$ samenhangend.
Bewijs (uit het ongerijmde): noem $g = f|A$. Stel $f(A)$ bevat een echt brok X. Dan geldt:
1°. X is echt deel van $f(A)$, dus er zijn $x \in X$ en $y \in f(A)\setminus X$; er volgt dat $\overset{-1}{g}(X) \neq \emptyset$, $A \setminus \overset{-1}{g}(X) \neq \emptyset$, dus dat $\overset{-1}{g}(X)$ echt deel van A is.
2. X is open en gesloten in $f(A)$, en g is continu, dus $\overset{-1}{g}(X)$ is open en gesloten in A.
Uit 1° en 2° volgt dat $\overset{-1}{g}(X)$ een echt brok is van A; tegenspraak.
Opmerking. Uit het bewijs blijkt dat het voldoende is van f te eisen dat hij continu is op A.

(7.8) Onder een overdekking van V verstaan we een collectie deelverzamelingen van V waarvan de vereniging V is. Bestaat de overdekking uit eindig veel deelverzamelingen, dan spreken we van een eindige overdekking; bestaat de overdekking uit open deelverzamelingen, dan spreken we van een open overdekking.
De stelling van Heine-Borel zegt dat iedere overdekking van een segment bestaande uit open bollen kan worden uitgedund tot een overdekking bestaande uit eindig veel van deze bollen.
Zij nu P een open overdekking van een segment A. Bij iedere $x \in A$ is een $U_x \in P$ met $x \in U_x$; aangezien U_x open is in A is er een open interval I_x in $\mathbb{R}$ met $x \in I_x \cap A \subset U_x$.

Er zijn eindig veel x, zeg $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zó dat

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i} \supset A;$$

we concluderen dat $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = A$. Er volgt dat elke open overdekking van A een eindige overdekking van A bevat. Generaliserend komen we tot de volgende definities:

(7.9) Definitie. V heet compact als

a. iedere open overdekking van V een eindige overdekking van V bevat,

of b. iedere collectie gesloten deelverzamelingen van V met lege doorsnede een eindige collectie met lege doorsnede bevat.

Bewijs van de equivalentie van a en b:
dit volgt uit de volgende formules, geldig voor iedere collectie P van deelverzamelingen van V:

$$\bigcup_{X\in P} X = V \Leftrightarrow \bigcap_{X\in P} \complement X = \emptyset \text{ en } \bigcap_{X\in P} X = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{X\in P} \complement X = V.$$

(7.10) Opmerkingen.

1. "Samenhang" en "compactheid" zijn topologische begrippen.
2. Een met (7,9), b equivalente formulering is: V is compact als elke collectie gesloten deelverzamelingen van V, waarvan iedere eindige deelcollectie een niet-lege doorsnede heeft, een niet-lege doorsnede heeft.

(7.11) Definitie. A heet compact als A als metrische ruimte compact is.

(7.12) Compactheid van A is gedefinieerd in termen van de door V op A geïnduceerde metriek. Het is ook mogelijk dit uitsluitend in termen van de metriek op V te doen (vgl. de oorspronkelijke formulering van de stelling van Heine-Borel):

Stelling. A is compact $\Leftrightarrow$ elke collectie open deelverzamelingen van V, waarvan de vereniging A bevat, bevat een eindige collectie waarvan de vereniging A bevat.

Bewijs:

$\Rightarrow$: stel A is compact; zij P een collectie open deelverzamelingen van V met

$$A \subset \bigcup_{X \in P} X.$$

De $X \cap A$ $(X \in P)$ vormen een open overdekking van A, dus er zijn eindig veel $X \in P$, zeg $X_1, X_2, \ldots, X_n$, zó dat $A = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \cap A)$. Er volgt dat $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i$.

$\Leftarrow$: stel P is een open overdekking van A. Bij elke $X \in P$ is een in V open Y_X met $A \cap Y_X = X$ (zie (4.22)); er geldt dus $A \subset \bigcup_{X \in P} Y_X$. Er zijn dan eindig veel Y_X, zeg $Y_{X_1}, Y_{X_2}, \ldots, Y_{X_n}$, zó dat $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} Y_{X_i}$; er volgt dat $A = \bigcup_{i=1}^{n} (Y_{X_i} \cap A) = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$.

(7.13) Voorbeelden.

1. In $\mathbb{R}$ is elk segment compact.
2. Elke eindige deelverzameling van V is compact; $\emptyset$ is compact.
3. $\mathbb{R}$ is niet compact; beschouw de overdekking bestaande uit intervallen $(n, n+2)$ $(n \in \mathbb{Z})$.
4. In $\mathbb{R}$ zijn $(0,1]$, $[1,\infty)$ en $\mathbb{N}$ niet compact: beschouw als overdekkingen resp. $\{(\frac{1}{n+1}, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{[1, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
5. In $\mathbb{R}$ is $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ niet compact: beschouw de overdekking $\{\{\frac{1}{n}\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

   Echter: $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ is wel compact. Zij namelijk P een collectie open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ waarvan de vereniging A bevat, en zij $X \in P$ zó dat $0 \in X$. X is open, dus $(\exists \varepsilon > 0)(-\varepsilon, +\varepsilon) \subset X$. Uit $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ volgt: $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset X$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \leqslant N$ is er een $X_n \in P$ met $\frac{1}{n} \in X_n$; we concluderen dat

   $$A \subset X \cup \bigcup_{i=1}^{N} X_i.$$

(7.14) Stelling. "Compactheid" is een continue invariant: is W een tweede metrische ruimte, is $A \subset V$ compact en is $f : V \to W$ continu, dan is $f(A)$ compact.

Bewijs: zij P een collectie open deelverzamelingen van W waarvan de vereniging f(A) bevat. Volgens (5.14) is, voor elke $X \in P$, $\overset{-1}{f}(X)$ open in V; er volgt dat $\{\overset{-1}{f}(X) | X \in P\}$ een collectie open deelverzamelingen van V is waarvan de vereniging A bevat. Volgens (7.12) zijn er eindig veel $X \in P$, zeg $X_1, X_2, \ldots, X_n$, met

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overset{-1}{f}(X_i);$$

er volgt dat $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Met (7.12) volgt nu dat f(A) compact is.

Opmerking. Door beschouwing van $f|A$ zien we dat het voldoende is van f te eisen dat hij continu is op A; vgl. (7.7).

(7.15) Stelling. A is compact ⇒ A is gesloten (in V) en begrensd.

Bewijs: zij A compact.

1°. Zij $p \in V\backslash A$. Bij iedere $a \in A$ zijn $\varepsilon_a > 0$ en $\delta_a > 0$ met $B(a;\varepsilon_a) \cap B(p;\delta_a) = \emptyset$. De $B(a;\varepsilon_a)$ zijn open in V, en hun vereniging bevat A; volgens (7.12) zijn er $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ zó dat $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i;\varepsilon_{a_i})$. Noem $\delta = \min\{\delta_{a_i} | 1 \leq i \leq n\}$; er geldt $B(p;\delta) \cap A = \emptyset$ (ga na) dus $B(p;\delta) \subset V\backslash A$. Er volgt dat $V\backslash A$ open is, dus dat A gesloten is.
Is $V\backslash A = \emptyset$, dan is $A = V$, dus dan is A gesloten.

2°. Zij $a \in A$. Alle $B(a;n)$ $(n \in \mathbb{N})$ zijn open in V, en hun vereniging bevat A. Volgens (7.12) zijn er eindig veel $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ met $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(a;n_i)$; is $N = \max(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, dan is $A \subset B(a;N)$, dus A is begrensd.
Verder is ook $\emptyset$ begrensd.

(7.16) Opmerkingen.

1. Bewijs nu nog eens, met behulp van (7.15), het niet compact zijn van de in (7.13) genoemde niet compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.
2. De omkering van (7.15) is niet voor alle V juist: elke verzameling V met triviale metriek is gesloten (in zichzelf) en begrensd; bevat V oneindig veel elementen, dan is V niet compact (ga na).

(7.17) Stelling. Een gesloten deel van een compacte metrische ruimte is compact.

Bewijs: zij V een compacte metrische ruimte, en zij A een gesloten deel van V. Zij P een collectie open deelverzamelingen van V waarvan de vereniging A bevat. Aangezien $\complement A$ open is in V, is de collectie deelverzamelingen van V bestaande uit $\complement A$ en alle $X \in P$ een open overdekking van V; er zijn dus eindig veel $X \in P$, zeg $X_1, X_2, \ldots, X_n$, zó dat

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i \cup \complement A = V,$$

dus $\bigcup_{i=1}^{n} X_i \supset A$. Er volgt dat A compact is (zie (7.12)).

(7.18) Voor $\mathbb{R}^n$ geldt de omkering van (7.15); de compacte delen van $\mathbb{R}^n$ zijn dus op eenvoudige wijze te karakteriseren:

Stelling. Een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is compact dan en slechts dan als hij gesloten en begrensd is.

Bewijs: het "slechts dan" volgt uit (7.15).

Zij B een gesloten blok in $\mathbb{R}^n$: $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (\forall_i) a_i \leq x_i \leq b_i\}$ waarin $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$. Stel er is een open overdekking P van B die geen eindige overdekking van B bevat. Een halvering van elk segment $[a_i, b_i]$ levert een verdeling van B in 2^n gesloten deelblokken waarvan er minstens één, zeg B_1, niet door een vereniging van eindig veel elementen van P is te overdekken. Vervolgens verdelen we B_1 in 2^n deelblokken, en vinden we een B_2 met dezelfde eigenschap. Zo doorgaande vinden we een nest $B \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ niet-lege gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$; geen enkele B_k is te overdekken door een vereniging van eindig veel elementen van P. Voor alle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in B_k$ geldt

$$|x_i - y_i| \leq 2^{-k} |b_i - a_i| \quad (1 \leq i \leq n)$$

(te bewijzen m.b.v. volledige inductie) dus $\rho(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot 2^{-k} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |b_i - a_i|$; er volgt dat $d(B_k) \to 0$ $(k \to \infty)$.

Volgens de neststelling (6.19) (die toepasbaar is wegens de volledigheid van $\mathbb{R}^n$, zie (6.6)) is er $b \in \mathbb{R}^n$ met $b \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$.
Er is een in B open $U \in P$ met $b \in U$, en er is $\varepsilon > 0$ met $B(b;\varepsilon) \cap B \subset U$. Zij nu k zó dat $d(B_k) < \varepsilon$; dan is $B_k \subset U$, tegenspraak. We concluderen dat B compact is.
Zij nu A een gesloten en begrensd deel van $\mathbb{R}^n$. Dan is er een bol in $\mathbb{R}^n$ die A bevat, dus ook een gesloten blok B in $\mathbb{R}^n$ met $B \supset A$. B is compact, en $A = A \cap B$ is gesloten in B; volgens (7.17) is A compact.

(7.19) Stelling. Is $f : V \to \mathbb{R}$ continu, dan geldt:
a. Is V samenhangend, dan is f doorlopend, d.w.z.: dan neemt f met elk tweetal functiewaarden alle tussenliggende waarden aan.
b. Is V compact, dan is f begrensd, terwijl sup f(x) en inf f(x) worden aangenomen (dus: max f(x) en min f(x) bestaan).
Bewijs:
a. Volgens (7.7) is f(V) een samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}$, die volgens (7.6) met elk tweetal punten ook alle tussenliggende punten bevat.
b. Volgens (7.14) is f(V) compact, volgens (7.15) dus gesloten en begrensd in $\mathbb{R}$. Uit de begrensdheid van f(V) volgt dat sup f(x) en inf f(x) bestaan; uit de geslotenheid van f(V) volgt dat sup $f(x) \in f(V)$ en inf $f(x) \in f(V)$ (vgl. (4.17), 6).

(7.20) Uit (7.6) en (7.18) volgt dat de samenhangende compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn: $\emptyset$, singletons en segmenten. We concluderen dat de waardenverzameling van een op een segment gedefinieerde reële continue functie een punt of een segment is.

(7.21) Van de stelling van Bolzano-Weierstrasz geldt de volgende generalisatie:

Stelling. A is compact $\Rightarrow$ iedere oneindige deelverzameling van A heeft een verdichtingspunt dat tot A behoort.

Bewijs: laat A compact zijn, en laat B een deelverzameling van A zijn die geen verdichtingspunt in A heeft. Bij iedere $a \in A$ bestaat een $\varepsilon_a > 0$ met $B(a;\varepsilon_a) \cap B \subset \{a\}$. Er zijn eindig veel $a \in A$, zeg $a_1, a_2, \ldots, a_n$, met

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i;\varepsilon_{a_i});$$

er volgt dat $B = A \cap B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\}$, dus dat B slechts eindig veel punten bevat.

(7.22) Opmerking. Men kan bewijzen dat in (7.21) ook "$\Leftarrow$" geldt; het (vrij gecompliceerde) bewijs laten we hier achterwege.

(7.23) Voor de fijnproevers.
Bij het bewijs van de compactheid van een gesloten blok in $\mathbb{R}^n$ (zie (7.18)) gebruiken we de volledigheid van $\mathbb{R}^n$. We noemen in dit verband de volgende stelling: een compacte metrische ruimte is volledig. Zij namelijk (a_n) een Cauchy-rij in een compacte metrische ruimte V. Is $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ eindig, dan is er $c \in A$ die oneindig vaak als term in (a_n) voorkomt; is A oneindig, dan heeft A volgens (7.21) een verdichtingspunt. In beide gevallen geldt: er is $c \in V$ waarvoor bij elke $\varepsilon > 0$ oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ bestaan met $a_n \in B(c;\frac{\varepsilon}{2})$. Zij nu $\varepsilon > 0$. Aangezien (a_n) een Cauchy-rij is , is er $N_1 \in \mathbb{N}$ met $(\forall m > N_1)(\forall n > N_1)\rho(a_m,a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$; er is $N > N_1$ met $a_N \in B(c;\frac{\varepsilon}{2})$. Voor alle $n > N_1$ geldt nu $\rho(a_n,c) \leq \rho(a_n,a_N) + \rho(a_N,c) < \varepsilon$; er volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.
Ga zelf na dat een begrensde volledige metrische ruimte niet noodzakelijk compact is.

(7.24) Tenslotte generaliseren we de stelling betreffende de uniforme continuïteit van een continue reële functie op een segment; we zien daarbij dat in deze stelling alleen de compactheid, en bijvoorbeeld niet de samenhang, van het segment een rol speelt. Laten (V,ρ_1) en (W,ρ_2) metrische ruimten zijn, $A \subset V$, f een afbeelding $V \to W$.

(7.25) Definities.

a. f heet uniform continu indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $x,y \in V$ met $\rho_1(x,y) < \delta$ geldt: $\rho_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

b. f heet uniform continu in A (ook: op A) indien $f|A$ uniform continu is.
(dus: indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zó dat voor alle $x,y \in A$ met $\rho_1(x,y) < \delta$ geldt: $\rho_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$).

(7.26) Uit de definities volgt: f is uniform continu $\Rightarrow$ f is continu. Vroeger zagen we al dat "$\Leftarrow$" niet voor alle V en W juist is. (beschouw $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \frac{1}{x}$). Voor een compacte V (en willekeurige W) is "$\Leftarrow$" wél juist:

(7.27) Stelling.

a. Is V compact, en is f continu, dan is f uniform continu.

b. Is A compact, en is f continu in A, dan is f uniform continu in A.

Bewijs: in verband met (7.25) volgt b direkt uit a; we bewijzen daarom a:

Zij $\varepsilon > 0$. Uit de continuïteit van f volgt: bij elke $p \in V$ bestaat een $\delta_p > 0$ zó dat $f(B(p;2\delta_p)) \subset B(f(p);\frac{1}{2}\varepsilon)$. De $B(p;\delta_p)$ vormen een open overdekking van V; uit de compactheid van V volgt dat er eindig veel $p \in V$, zeg $p_1, p_2, \ldots, p_n$, zijn met $V = \bigcup_{i=1}^{n} B(p_i;\delta_{p_i})$.
Noem $\delta = \min\{\delta_{p_i} | 1 \leq i \leq n\}$.
Zij $x \in V$, $y \in V$ met $\rho_1(x,y) < \delta$. Er is een p_k (met $1 \leq k \leq n$) met $x \in B(p_k;\delta_{p_k})$; uit

$$\rho_1(p_k,y) \leq \rho_1(p_k,x) + \rho_1(x,y) < \delta_{p_k} + \delta \leq 2\delta_{p_k}$$

volgt dat $y \in B(p_k;2\delta_{p_k})$. Er volgt dat

$$\rho_2(f(x),f(y)) \leq \rho_2(f(x),f(p_k)) + \rho_2(f(p_k),f(y)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon+\tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Opgaven:

56. Geef voorbeelden waaruit blijkt dat "openheid", "geslotenheid", "begrensdheid", volledigheid", "een vdp. zijn", "een inwendig punt zijn", "een randpunt zijn","een geïsoleerd punt zijn", "een Cauchy-rij zijn" geen continue invarianten zijn.

57. (i) A en B zijn samenhangende deelverzamelingen van een metrische ruimte V. Bewijs: als $A \cap B \neq \phi$ dan is $A \cup B$ samenhangend.
(ii) $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ is een rij samenhangende deelverzamelingen van V. Bewijs: als voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $A_n \cap A_{n+1} \neq \phi$ dan is $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ samenhangend.

58. V is een metrische ruimte. Bewijs:
(i) Als $A \subset V$ samenhangend is dan is $\bar{A}$ samenhangend.
(ii) Als $a \in V$ en C de vereniging is van alle samenhangende deelverzamelingen van V die a bevatten, dan is C samenhangend en gesloten.

59. Bewijs: een metrische ruimte V is dan en slechts dan niet samenhangend als er een deelverzameling A van V bestaat met $A \neq \phi$, $A \neq V$ en $fr(A) = \phi$.

60. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat de verzameling $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ samenhangend is.

61*. Zij $A = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$ en $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0$ en $y = \sin \frac{1}{x}\}$ (zie opmerking bij opgave I,2).
Bewijs dat $A \cup B$ samenhangend is.

62. V is een metrische ruimte; A is een samenhangende deelverzameling van V. Bewijs: als a een geïsoleerd punt van A is dan is $A = \{a\}$.

63. De metrische ruimte V is compact en samenhangend; $f : V \to V$ is continu.
Bewijs: als voor iedere open deelverzameling A van V geldt dat f(A) open is, dan is f surjectief.

64. V is een compacte metrische ruimte.
Bewijs: bij iedere $\varepsilon > 0$ zijn er eindig veel punten $a_i \in V$ $(1 \leq i \leq n)$ zodanig dat er bij elke $x \in V$ een $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ is met $\rho(x,a_i) < \varepsilon$.

65. Laten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ compacte deelverzamelingen zijn van een metrische ruimte V.
Bewijs: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ is compact.

66. Zij $\mathcal{L}$ een collectie compacte deelverzamelingen van een metrische ruimte V.
Bewijs: $\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L$ is compact.

67. V en W zijn metrische ruimten; V is compact; $f : V \to W$ is continu.
Bewijs:
(i) voor iedere gesloten deelverzameling A van V geldt: $f(A)$ is gesloten;
(ii) is f bijectief dan geldt voor iedere open deelverzameling A van V: $f(A)$ is open;
(iii) is f bijectief dan is f^{-1} continu.

68. V is een compacte metrische ruimte. Bewijs:
x is geïsoleerd punt van V $\Leftrightarrow$ $V \setminus \{x\}$ is compact.

69. V is de verzameling van alle begrensde reëelwaardige functies op $\mathbb{R}$; V is voorzien van de sup-metriek (zie (4.3) voorbeeld 7); $n \in V$ is de functie, gegeven door $n(x) = 0$ vóór alle $x \in \mathbb{R}$.
Bewijs dat de verzameling $A = \{f \in V \mid \rho(f,n) \leq 1\}$ niet compact is (contrueer een rij functies in A die niet uniform convergent is).

70. V is een metrische ruimte; $K \subset O \subset V$; K is compact en O is open.
$K_\varepsilon = \{x \in V \mid d(x,K) < \varepsilon\}$; (vgl. opgave 20).
Bewijs: er is een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $K_\varepsilon \subset O$.

71. V is een metrische ruimte; $A, B \subset V$.
Bewijs:
(i) de afbeelding $f : V \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x) = d(A,x)$, is continu (vgl. opgave 20 en 28);
(ii) als B compact is dan is er een $b \in B$ met $d(A,b) = d(A,B)$.

72. A is een gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^n$; B is een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$.
Bewijs:
(i) bij iedere $x \in \mathbb{R}^n$ is er een $a \in A$ met $\rho(a,x) = d(A,x)$ (gebruik opgave 28 en stelling (7.18));
(ii) er zijn $a \in A$ en $b \in B$ met $\rho(a,b) = d(A,B)$;
(iii) in een willekeurige metrische ruimte V is (ii) niet altijd juist (neem bijv. $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \vee x > 1\}$, voorzien van de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde metriek).

73. Zij $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 10\}$ en $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 1\}$.
Bewijs:
(i) er zijn $a \in A$ en $b \in B$ met $\rho(a,b) = d(A,B)$;
(ii) deze a en b zijn niet uniek.

74. X is een niet-lege verzameling; V is de verzameling van alle begrensde funkties $X \to \mathbb{R}$, voorzien van de sup-metriek. Zij F een compacte deelverzameling van V en laat $G \subset F$ voldoen aan: als (g_n) een rij in G is met puntsgewijze limiet $g \in V$, dan $g \in G$. Bewijs dat G compact is.

75.* Bewijs dat de in (5.16) gedefinieerde metrische ruimte compact is.

76. Laat $\mathbb{Q}$ voorzien zijn van de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde metriek. De functie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ voor alle } x \text{ met } x^2 > 2 \\ f(x) = x+1 \text{ voor alle } x \text{ met } x^2 < 2 \end{cases}$$

Bewijs dat f continu maar niet uniform continu is op $\mathbb{Q}$.

77. De afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zijn gegeven door

$$f(x,y) = (3x + 5y,\ 2x - 7y) \text{ en}$$

$$g(x,y) = (x^2 + y^2,\ x^2 - y^2)$$

Bewijs dat f uniform continu is op $\mathbb{R}^2$ en dat g niet uniform continu is op $\mathbb{R}^2$.

§8. Genormeerde lineaire ruimten.

(8.1) Veel van de in de analyse voorkomende verzamelingen zijn, behalve van een metriek (die ze tot een metrische, en dus ook tot een topologische,ruimte maakt), nog voorzien van een algebraïsche structuur. Als voorbeelden van zowel van een topologie als van een algebraïsche structuur voorziene verzamelingen behandelen we in het volgende genormeerde lineaire ruimten en genormeerde algebra's.

Zij K het lichaam $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

(8.2) Zij E een lineaire ruimte over K; we spreken van een reële resp. complexe lineaire ruimte als $K = \mathbb{R}$ resp. $K = \mathbb{C}$.

Definities.

a. Een norm op E is een functie $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ die voldoet aan:

1º $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2º $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3º $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (driehoeksongelijkheid)

voor alle $x \in E, y \in E, \lambda \in K$.

b. Een (reële resp. complexe) genormeerde lineaire ruimte is een paar $(E,\|\cdot\|)$ waarin E een (reële resp. complexe) lineaire ruimte en $\|\cdot\|$ een norm op E is.

Opmerking. Uit 1º t/m 3º volgt: $\|x\| \geqslant 0, \|x\| = \|-x\|$ en $\|x-y\| \geqslant |\|x\|-\|y\||$.

(8.3) Zij $(E,\|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. De afbeelding $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\rho(x,y) = \|x-y\|$ is een metriek op E; we noemen ρ de door de norm $\|\cdot\|$ op E geïnduceerde metriek. Uitspraken van metrische aard over $(E,\|\cdot\|)$ zullen we steeds interpreteren als uitspraken over (E,ρ). Voorbeelden:

1º Een open bol in E is een verzameling $\{x \in E \mid \|x-a\| < \varepsilon\}$, waarin $a \in E$ en $\varepsilon > 0$.

2º Zij $b \in E$. Een rij (a_n) in E is convergent met limiet b $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \|a_n-b\| = 0$.

3º $A \subset E$ is begrensd $\Leftrightarrow$ $(\exists K > 0)(\forall x \in A)\|x\| \leqslant K$.

4°. Een Cauchy-rij in E is een rij (a_n) in E met

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n,m > N)\|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

Opmerkingen.

1. De metriek op E is translatieinvariant, d.w.z.

$$(\forall x,y,z \in E)\rho(x,y) = \rho(x+z,y+z).$$

2. Is E niet-triviaal, d.w.z. bevat E meer dan één punt, dan is elk punt van E verdichtingspunt van E. Immers: zij $\varepsilon > 0$, $p \in E$. Er is $a \in E$ met $a \neq 0$; alle punten $p+\lambda a$ met $|\lambda| < \varepsilon/\|a\|$ liggen binnen $B(p;\varepsilon)$ (ga na).

   In het volgende veronderstellen we steeds dat E niet-triviaal is.

(8.4) Definities.

a. Een reëel inprodukt op een reële lineaire ruimte E is een afbeelding $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ die voldoet aan:
   1°. $(x|x) \geq 0$, en $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   2°. $(x|y) = (y|x)$ (symmetrie)
   3°. $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$ } (bilineariteit)
   4°. $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ }
   voor alle $x,y,z \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. Een complex inprodukt op een complexe lineaire ruimte E is een afbeelding $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$ die voldoet aan:
   1°. $(x|x) \geq 0$, en $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   2°. $(x|y) = \overline{(y|x)}$ (hermiticiteit)
   3°. $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$ } (sesquilineariteit)
   4°. $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ }
   voor alle $x,y,z \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

   Opmerking. Uit 2° en 4° volgt $(x|\lambda y) = \overline{\lambda}(x|y)$.

(8.5) Voor de in (8.4) genoemde inprodukten definiëren we: $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}} (x \in E)$. Men gaat gemakkelijk na dat $\|\cdot\|$ aan de eisen 1° en 2° voor een norm (zie (8.2)) voldoet. Verder geldt, voor alle $x,y \in E$:

(*) $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (ongelijkheid van Schwarz).

Immers: voor $y = 0$ is (*) juist; is $y \neq 0$, dan is

$$(\forall \lambda \in K)(x-\lambda y|x-\lambda y) \geq 0$$

en door substitutie $\lambda = (x|y)/(y|y)$ volgt (*).

Uit (*) volgt nu dat

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) \leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2;$$

$\|\cdot\|$ is dus een norm op E.

(8.6) Definities.

a. Een (reële resp. complexe) Banachruimte is een (reële resp. complexe) genormeerde lineaire ruimte die volledig is.

b. Een (reële resp. complexe) Hilbertruimte is een (reële resp. complexe) Banachruimte waarin de norm afkomstig is van een (reëel resp. complex) inprodukt, op de in (8.5) beschreven wijze.

(8.7) Voorbeelden.

Op $\mathbb{R}^n$ definiëren we een reëel inprodukt door

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

(waarin $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$) en normen door

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = (x|x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Euclidische norm)}$$

$$\|x\|_3 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{(maximum-norm)}$$

(vgl. (4.3), 2 t/m 4). Er geldt

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ \frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 .$$

Er volgt dat binnen elke bolomgeving van a in de zin van één van deze normen bolomgevingen van a in de zin van de beide andere normen liggen (voor alle $a \in \mathbb{R}^n$); de drie normen bepalen dus dezelfde topologie op $\mathbb{R}^n$.

Uit (6.6), 3 volgt: voorzien van $\|\cdot\|_2$ is $\mathbb{R}^n$ een Hilbertruimte, voorzien van $\|\cdot\|_1$ of $\|\cdot\|_3$ is $\mathbb{R}^n$ een Banachruimte.

(8.8) Voor de fijnproevers. Is een norm $\|\cdot\|$ afkomstig van een inprodukt, dan geldt de parallelogramwet:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Met behulp hiervan gaat men gemakkelijk na dat $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_3$ in (8.7) niet afkomstig zijn van een inprodukt op $\mathbb{R}^n$.

(8.9) Definities.

a. Een (reële resp. complexe) algebra is een paar $(E,\cdot)$ waarin E een (reële resp. complexe) lineaire ruimte is en $\cdot$ een afbeelding $E \times E \to E$ (vermenigvuldiging) die voldoet aan

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (associatieve wet)
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributieve wetten)
3. $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$

voor alle $x,y,z \in E$, $\lambda \in K$.
In plaats van $x \cdot y$ schrijven we ook xy.

b. Een (reële resp. complexe) genormeerde algebra is een paar $(E,\|\cdot\|)$ waarin E een (reële resp. complexe) algebra is, en $\|\cdot\|$ een norm op E die multiplicatief is, d.w.z. die voldoet aan

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

voor alle $x,y \in E$.

c. Een (reële resp. complexe) Banachalgebra is een (reële resp. complexe) genormeerde algebra die als (reële resp. complexe) genormeerde lineaire ruimte volledig is.

(8.10) Voorbeelden:

1. $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ met de gebruikelijke algebraïsche bewerkingen en met als norm de absolute waarde zijn reële resp. complexe Banach-algebra's.
2. De verzameling $M(n,n)$ van alle reële $n \times n$-matrices $A = (a_{ij})$ is een reële algebra als we definiëren

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$
$$A \cdot B = C \text{ met } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

(voor alle $A,B \in M(n,n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$). Merk op dat niet voor alle $A,B \in M(n,n)$ geldt $A \cdot B = B \cdot A$ (de matrixvermenigvuldiging is niet commutatief).
Op $M(n,n)$ definiëren we de normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ door

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$
$$\|A\|_2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(waarin $A = (a_{ij})$); vgl. (4.3), 9 en (8.7).

Als in (8.7) bewijst men dat deze normen op M(n,n) dezelfde topologie bepalen. Met (6.6), 4 volgt nu: voorzien van $\|\cdot\|_1$ of $\|\cdot\|_2$ is M(n,n) een Banachruimte. $\|\cdot\|_2$ is multiplicatief, hetgeen volgt uit

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leqslant \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot \sum_{k,j=1}^{n} |b_{kj}|;$$

M(n,n), voorzien van $\|\cdot\|_2$, is dus een reële Banachalgebra. Ga zelf na dat $\|\cdot\|_1$ niet multiplicatief is.

(8.11) Stelling. Laat X een metrische ruimte zijn, p een verdichtingspunt van X, V een genormeerde lineaire ruimte (over K), f en g twee afbeeldingen $X \to V$, (a_n) en (b_n) twee rijen in V, $\lambda \in K$.

a. Is $\lim_{x\to p} f(x) = l$, $\lim_{x\to p} g(x) = m$ en $a_n \to a$, $b_n \to b$, dan is

1° $\lim_{x\to p} [f(x) + g(x)] = l + m$, $a_n+b_n \to a + b$;

2° $\lim_{x\to p} \lambda f(x) = \lambda l$, $\lambda a_n \to \lambda a$;

is V bovendien een genormeerde algebra (over K), dan is

3° $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = lm$, $a_nb_n \to ab$;

is V = K en is $m \neq 0$, $(\forall n)b_n \neq 0$, $b \neq 0$, dan is

4° $\lim_{x\to p} f(x)/g(x) = l/m$, $a_n/b_n \to a/b$;

5° $\lim_{x\to p}|f(x)| = |l|$, $|a_n| \to |a|$.

b. Zijn f en g continu, dan zijn $f + g : X \to V$ (gedefinieerd door $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$) en $\lambda f : X \to V$ (gedefinieerd door $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$) continu; is V bovendien een genormeerde algebra (over K), dan is $fg : X \to V$ (gedefinieerd door $(fg)(x) = f(x)g(x)$) continu; is V = K, dan is $|f| : X \to V$ (gedefinieerd door $|f|(x) = |f(x)|$) continu, terwijl $f/g : X \to V$ (gedefinieerd door $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$) continu is in $\{x \in X | g(x) \neq 0\}$.

Bewijs: volgens (5.12) volgt b uit a. We bewijzen de onder a over f en g gedane uitspraken; de overeenkomstige uitspraken voor rijen worden op analoge wijze bewezen. Zij $\varepsilon > 0$.

1° Er is een gereduceerde omgeving $\overset{0}{U}$ van p zó dat

$$(\forall x \in \overset{0}{U})\{\|f(x) - l\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ en } \|g(x) - m\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\}.$$

Er volgt dat $(\forall x \in \overset{0}{U})$:

$$\|\{f(x) + g(x)\} - (l+m)\| \leq \|f(x) - l\| + \|g(x) - m\| < \varepsilon.$$

2°. Voor $\lambda = 0$ geldt $\lim_{x \to p} \lambda f(x) = \lim_{x \to p_0} 0 = 0 = \lambda l$; stel dus $\lambda \neq 0$.

Er is een gereduceerde omgeving $\overset{0}{U}$ van p zó dat

$$(\forall x \in \overset{0}{U})\|f(x) - l\| < \varepsilon/|\lambda|.$$

Er volgt dat $(\forall x \in \overset{0}{U})$:

$$\|\lambda f(x) - \lambda l\| = |\lambda|\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

3°. Schrijf

$$\|f(x)g(x) - lm\| = \|f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm\| \leq$$
$$\leq \|f(x)\| \cdot \|g(x) - m\| + \|m\| \cdot \|f(x) - l\|.$$

Er is een gereduceerde omgeving $\overset{0}{U}$ van p zó dat $(\forall x \in \overset{0}{U})$:

$$\|f(x) - l\| < \min \{\frac{\varepsilon}{2(\|m\|+1)}, 1\}$$

(voor die x geldt $\|f(x)\| < \|l\| + 1$) en

$$\|g(x) - m\| < \frac{\varepsilon}{2(\|l\|+1)}.$$

Er volgt dat

$$(\forall x \in \overset{0}{U})\|f(x)g(x) - lm\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

4°. Schrijf

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x)-m|}{|m||g(x)|}.$$

Er is een gereduceerde omgeving $\overset{0}{U}$ van p zó dat

$$(\forall x \in \overset{0}{U})|g(x) - m| < \min (\tfrac{1}{2}\varepsilon|m|^2, \tfrac{1}{2}|m|).$$

Er volgt dat $(\forall x \in \overset{0}{U})$:

$$|m| - |g(x)| \leq |g(x) - m| < \tfrac{1}{2}|m|, \text{ dus } |g(x)| > \tfrac{1}{2}|m|$$

(voor die x geldt dus $g(x) \neq 0$), en

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon|m|^2 \cdot \frac{1}{|m|} \cdot \frac{2}{|m|} = \varepsilon.$$

Hiermee is bewezen dat $\lim_{x \to p} 1/g(x) = 1/m$; met het onder 3°. bewezene volgt nu $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = l/m$.

5°. Dit volgt uit $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$.

(8.12) Zij X een verzameling, V de verzameling van alle begrensde reëelwaardige functies op X. V is een reële algebra indien we f+g, λf en fg (f,g $\in$ V, $\lambda \in \mathbb{R}$) op de gebruikelijke wijze (zie (8.11), b) definiëren. We voorzien V van de norm $\|\cdot\|$:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad \text{(sup-norm)}$$

(vgl. (4.3)).

Deze norm is multiplicatief, immers voor alle $x \in X$ en alle $f,g \in V$ is

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

dus $\|fg\| = \sup_{x\in X} |f(x)g(x)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Met (6.6),5 volgt nu: voorzien van $\|\cdot\|$ is V een (reële) Banachalgebra.

(8.13) Analoog: de verzameling van alle begrensde complexwaardige functies op X, voorzien van de gebruikelijke algebraïsche bewerkingen en van de sup-norm, is een (complexe) Banachalgebra.

(8.14) Zij X een metrische ruimte, V de in (8.12) of de in (8.13) ingevoerde Banachalgebra der begrensde reëel - resp. complexwaardige functies op X (met sup-norm).

Stelling. Is (f_n) een rij continue functies in V met limiet f, dan is f continu.
Anders gezegd: een uniform convergente rij begrensde continue (reëel - of complexwaardige) functies heeft een continue limiet (-functie).
Bewijs: voor alle $a \in X$, $x \in X$ geldt

$$(*) \quad |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a)-f(a)| \leq$$
$$\leq 2\|f - f_N\| + |f_N(x) - f_N(a)|.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Kies in (*) N zó dat $\|f - f_N\| < \frac{1}{3}\varepsilon$; uit de continuïteit van f_N volgt dat er een omgeving U van a is zó dat $f_N(U) \subset B(f_N(a);\frac{1}{3}\varepsilon)$. Er volgt dat $f(U) \subset B(f(a);\varepsilon)$; f is dus continu.

(8.15) Zij X een metrische ruimte, E de algebra der begrensde functies $X \to K$; volgens (8.12) en (8.13) is E, voorzien van de supnorm, een Banachalgebra (over K).
Zij F de verzameling van alle begrensde continue functies $X \to K$; volgens (8.11) b is F, voorzien van de gebruikelijke algebraïsche bewerkingen, een algebra over K. Volgens (8.14) is F een gesloten deel van E (ga na). Met (6.7) volgt nu dat F, voorzien van de sup-norm, volledig en dus een Banachalgebra (over K) is.

(8.16) Zij X een metrische ruimte. Met $C(X)$ resp. $C_{\mathbb{C}}(X)$ geven we aan de algebra der reëel - resp. complexwaardige continue functies op X.
Is X een compacte metrische ruimte, dan is, volgens (7.14) en (7.15), elke continue $f : X \to K$ begrensd. Uit het bovenstaande volgt nu:

Stelling. Is X een compacte metrische ruimte, dan zijn $C(X)$ en $C_{\mathbb{C}}(X)$, voorzien van de sup-norm, (reële resp. complexe) Banach-algebra's.

(8.17) Stelling (van Dini). Zij X een compacte metrische ruimte, (f_n) een monotone rij in $C(X)$, $f \in C(X)$ zó dat

$$(\forall x \in X) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

("(f_n) convergeert op X puntsgewijs naar f"). Dan geldt $f_n \to f$ in $C(X)$, voorzien van de sup-norm.
Bewijs: veronderstel (f_n) monotoon dalend; zij $\varepsilon > 0$. Bij elke $a \in X$ is een $N(a) \in \mathbb{N}$ zó dat

$$(\forall n \geq N(a))\{f_n(a) - f(a) = |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon\}.$$

Beschouw de verzamelingen $U_a = \{x \in X | f_{N(a)}(x) - f(x) < \varepsilon\}$. Volgens (5.14) is elke U_a open; verder is $a \in U_a$ (voor alle $a \in X$). We concluderen dat $\{U_a | a \in X\}$ een open overdekking van X is; wegens de compactheid van X zijn er dus $a_1, a_2, \ldots, a_p \in X$ met $X = \bigcup_{k=1}^{p} U_{a_k}$. Zij $N = \max(N(a_1), N(a_2), \ldots, N(a_p))$, en $m \geq N$.
Voor alle $x \in X$ is er een $k \leq p$ met $x \in U_{a_k}$, dus

$$f_m(x) - f(x) \leq f_{N(a_k)}(x) - f(x) < \varepsilon;$$

er volgt dat voor alle $m \geq N$ geldt $\sup_{x\in X} |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Is (f_n) monotoon stijgend, dan passen we het zojuist bewezene toe op de rij $(-f_n)$.

(8.18) We geven nog twee voorbeelden van normen: zij $C[a,b]$ de (reële) algebra van alle continue functies $[a,b] \to \mathbb{R}$. We beschouwen de afbeeldingen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2 : C[a,b] \to \mathbb{R}$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\|f\|_2 = \{\int_a^b [f(x)]^2 dx\}^{\frac{1}{2}}.$$

Men bewijst gemakkelijk dat $\|\cdot\|_1$ een norm is; de implicatie "$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$" volgt uit de continuïteit van f (vgl. hoofdstuk I, opgave 8). Voeren we nog een (reëel) inprodukt op $C[a,b]$ in door

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

(de implicatie "$(f|f) = 0 \Rightarrow f = 0$" volgt uit de continuïteit van f), dan geldt $\|f\|_2 = (f|f)^{\frac{1}{2}}$; volgens (8.5) is $\|\cdot\|_2$ dus een norm.

Van deze normen vermelden we nog het volgende:

a. De sup-norm, $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ bepalen verschillende topologieën op $C[a,b]$. We lichten deze uitspraak met een voorbeeld toe: Definieer $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{als } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{als } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Er geldt $f_n \in C[0,1]$, $f_n \to 0$ voor $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ (d.w.z.: $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$ en $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$), maar $f_n \not\to 0$ voor de sup-norm (d.w.z.: niet geldt $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)| = 0$); ga na (maak ook een plaatje).

b. $C[a,b]$, voorzien van $\|\cdot\|_1$ of $\|\cdot\|_2$, is niet volledig. We lichten deze uitspraak met een voorbeeld toe: we bewijzen dat $C[-1,+1]$, voorzien van $\|\cdot\|_1$, niet volledig is. We definiëren daartoe $f_n : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ nx & \text{als } 0 < x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{als } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

(maak een plaatje). Er geldt $f_n \in C[-1,1]$ en $(\forall n)(\forall p > 0)\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leqslant \frac{1}{2n}$; er volgt dat (f_n) een Cauchy-rij in $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$ is.
Uit het ongerijmde bewijzen we dat deze rij niet convergent is in $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$: stel er is $f \in C[-1,1]$ met $f_n \to f$ voor $\|\cdot\|_1$.
Stel er is $a \in (0,1]$ met $f(a) \neq 1$, zeg $f(a) > 1$. Wegens de continuïteit van f is er $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < a$ en $k > 0$ zó dat $(\forall x \in [a-\varepsilon,a]) f(x) \geqslant 1+k$ (ga na). Voor alle $n > \frac{1}{a-\varepsilon}$ is nu

$$\|f_n - f\| \geqslant \int_{a-\varepsilon}^{a} |f_n(x) - f(x)|dx \geqslant k\varepsilon,$$

tegenspraak.

Dus geldt $f(x) = 1$ voor alle $x \in (0,1]$. Op analoge wijze bewijst men dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in [-1,0]$. Uit de continuïteit van f volgt nu $0 = \lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$; tegenspraak.

Toepassing: differentiaalvergelijkingen.

(8.19) Zij F een functie $[a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Een differentieerbare $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heet op $[a,b]$ een oplossing van de (expliciete eerste orde-) differentiaalvergelijking $y' = F(x,y)$ indien

$$(*) \quad (\forall x \in [a,b])f'(x) = F(x,f(x)).$$

Zij nu F continu. Volgens (5.17), 1 is de afbeelding $x \mapsto (x,f(x))$ (van $[a,b]$ in $\mathbb{R}^2$) continu; volgens (5.13) is de functie $x \mapsto F(x,f(x))$ continu. Volgens (1.7) is nu $(*)$ equivalent met

$$(\forall x,c \in [a,b])f(x) = f(c) + \int_c^x F(t,f(t))dt.$$

We gebruiken deze overwegingen bij het bewijs van de volgende existentie- en eenduidigheidsstelling voor differentiaalvergelijkingen:

(8.20) Stelling (van Picard). Zij $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu, terwijl geldt:

$$(**) \quad (\exists k > 0)(\forall x \in [a,b])(\forall y_1,y_2 \in \mathbb{R})|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \leq k|y_1-y_2|.$$

Dan is er bij elke $c \in [a,b]$ en elke $d \in \mathbb{R}$ precies één oplossing f van de differentiaalvergelijking $y' = F(x,y)$ (op $[a,b]$) die voldoet aan $f(c) = d$.

Bewijs: volgens (8.19) wordt door

$$(Tf)(x) = d + \int_c^x F(t,f(t))dt$$

een afbeelding T van $C[a,b]$ in zichzelf gedefinieerd. We definiëren een afbeelding $\|\cdot\| : C[a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$\|f\| = \sup_{a\leq x\leq b} e^{-2k|x-c|}|f(x)|.$$

Als voor de "gewone" sup-norm bewijst men dat $\|\cdot\|$ een norm op $C[a,b]$ is en dat $C[a,b]$, voorzien van deze norm, een Banachruimte is (zie de opgaven).

Uit

$$|(Tf)(x) - (Tg)(x)| \leqslant |\int_c^x |F(t,f(t)) - F(t,g(t))|dt| \leqslant$$

$$\leqslant k|\int_c^x |f(t) - g(t)|dt| = k|\int_c^x e^{2k|t-c|} \cdot e^{-2k|t-c|}|f(t)-g(t)|dt| \leqslant$$

$$\leqslant k\|f-g\| \cdot |\int_c^x e^{2k|t-c|}dt| = k\|f-g\| \cdot \frac{e^{2k|x-c|}-1}{2k} <$$

$$< \tfrac{1}{2}\|f-g\| e^{2k|x-c|}$$

(waarin $f,g \in C[a,b]$) volgt dat $\|Tf - Tg\| \leqslant \frac{1}{2}\|f-g\|$, dus dat T een contractie is op $(C[a,b], \|\cdot\|)$. Volgens de contractiestelling is er precies één $f \in C[a,b]$ met $Tf = f$, dus (vgl. (8.19)) precies één f met $f(c) = d$ en $f'(x) = F(x,f(x))$ (voor alle $x \in [a,b]$).

(8.21) Opmerkingen.

1. Voorwaarde (**) (in (8.20)) noemt men een Lipschitz-voorwaarde; k heet hierin de Lipschitz-constante.

2. Het gegeven existentiebewijs is constructief: volgens (6.22) is met behulp van het iteratieve proces $f_{n+1} = Tf_n$, met willekeurige startwaarde $f_0 \in C[a,b]$, een rij (f_n) in $C[a,b]$ te construeren die convergeert naar f in de zin van de norm $\|\cdot\|$ (en dus ook in de zin van de "gewone" sup-norm; zie de opgaven).

(8.22) Voorbeelden.

1. $F(x,y) = y$: neem $k = 1$. Voor alle $a,b \in \mathbb{R}$ is er op $\mathbb{R}$ precies één oplossing f van de differentiaalvergelijking $y' = y$ die voldoet aan $f(a) = b$ (vgl. hoofdstuk I, opgave 5); dit volgt door toepassing van (8.20) op de segmenten $[a-p,a+p]$ (waarin $p > 0$)(de bedoelde oplossing is be^{x-a}).

2. Beschouw de lineaire eerste orde-differentiaalvergelijking $y' + p(x)y = q(x)$ waarin p en q: $[a,b] \to \mathbb{R}$ continu zijn. Neem $F(x,y) = -p(x)y + q(x)$ en $k = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)|$. De (enige) oplossing f van deze differentiaalvergelijking (op $[a,b]$) die voldoet aan $f(c) = d$ (waarin $c \in [a,b]$, $d \in \mathbb{R}$) is

$$e^{-P(x)}[\int_c^x q(t)e^{P(t)}dt + de^{P(c)}]$$

waarin P een primitieve van p is (vgl. Inf. hoofdstuk II, opgave 18).

Opgaven:

78. $(E,\|\cdot\|)$ is een genormeerde lineaire ruimte.
Bewijs: de afbeelding $E \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $x \mapsto \|x\|$, is uniform continu.

79. E is de verzameling van alle rijen reële getallen a met $a_n \to 0$.
Bewijs:
(i) E is met de gebruikelijke definities van λa, $a+b$ en ab $(a,b \in E,\ \lambda \in \mathbb{R})$ een reële algebra.
(ii) $a \mapsto \|a\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ is een norm op E.
(iii) E is met de in (ii) gedefinieerde norm een Banachalgebra.

80. E is de verzameling van alle continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{-x^2}dx$ convergent is.
(i) Bewijs dat E een reële lineaire ruimte is en dat $f \mapsto \|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{-x^2}dx$ een norm op E is.
(ii) Zij $f(x) = x$ en $g(x) = x^3$. Bereken $\|f\|$, $\|g\|$ en $\|f-g\|$.

81. Zij X een metrische ruimte en zij C(X) de reële lineaire ruimte van de continue (niet noodzakelijk begrensde) functies $X \to \mathbb{R}$.
(i) Ga na dat, hoewel op C(X) geen sup-norm gedefinieerd kan worden, de begrippen "op X uniform convergente rij" en "op X uniforme Cauchy-rij" in C(X) toch gedefinieerd kunnen worden op de in (5.3),* genoemde wijze.
(ii) Bewijs: als (f_n) een rij functies in C(X) is die op X uniform convergeert naar een functie f, dan $f \in C(X)$.
(iii) Bewijs: als (f_n) een op X uniforme Cauchy-rij is van functies in C(X), dan convergeren de f_n op X uniform naar een limietfunctie $f \in C(X)$.

82. Beschouw $C[0,1]$, voorzien van de normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ (vgl. (8.18)). De functies $f_n \in C[0,1]$ zijn gegeven door $f_n(x) = (\sqrt{n})x^n$.
(i) Bereken $\|f_n\|_1$ en $\|f_n\|_2$.
(ii) Bewijs dat $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ op $C[0,1]$ verschillende topologieën bepalen.

83. Bewijs dat voor iedere $f \in C[a,b]$ geldt: $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2 \leqslant$ $\leqslant (b-a)\|f\|_3$, waarbij $\|\cdot\|_3$ de sup-norm is en $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ de in (8.18) gedefinieerde normen zijn.
Bereken $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ en $\|f\|_3$ voor $f(x) = \cos \pi x$ en $[a,b] = [0,1]$ (zie opmerking bij opgave I,2).

84. Bewijs dat op $C_{\mathbb{C}}[a,b]$ door $(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ een complex inprodukt gedefinieerd wordt; hierbij wordt voor een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met $f(x) = u(x) + iv(x)$ de integraal over $[a,b]$ gedefinieerd door $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$. Geef de bij dit inprodukt behorende norm aan.

85. Bewijs dat $C[-1,+1]$, voorzien van de norm $f \mapsto \|f\|_2 =$ $= \{\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx\}^{\frac{1}{2}}$, niet volledig is (vgl. (8.18)).

86. Laat $M(n,n)$ voorzien zijn van de norm $\|\cdot\|_1$ (vgl. (8.10)).
(i) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat $\|\cdot\|_1$ niet multiplicatief is.
(ii) Bewijs dat voor alle $A,B \in M(n,n)$ geldt $\|AB\|_1 \leqslant n \cdot \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$.
(iii) Bewijs dat $A \mapsto \|A\| = n \cdot \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$ een multiplicatieve norm op $M(n,n)$ is.

87. Laat $C[a,b]$ voorzien zijn van de sup-norm.
(i) Bewijs: als $f_n \to f$ in $C[a,b]$ dan is $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (vgl. opgave 27).
(ii) Geef voorbeelden waaruit blijkt dat puntsgewijze convergentie van f_n naar f niet voldoende is en dat uniforme convergentie niet noodzakelijk is voor de juistheid van de uitspraak $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. (neem bijv. $f_n(x) =$ $= n^2x(1-x)^n$ resp. $f_n(x) = nx(1-x)^n$ op $[0,1]$; vgl. opgave 38).

88. Bewijs dat de rij uit opgave 38 niet monotoon naar 0 convergeert.

89. X is een compacte metrische ruimte; V is de verzameling van alle reëelwaardige begrensde functies op X, voorzien van de sup-metriek.
(f_n) is een rij continue functies in V die puntsgewijs naar een continue functie f_0 convergeert. Voor alle $x \in X$ geldt bovendien $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \ldots$
Bewijs dat $\{f_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ een compacte deelverzameling van V is.

90. Laat $C[0,2]$ voorzien zijn van de sup-norm.
De functies $f_n \in C[0,2]$ zijn gegeven door $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)}{1+x^n}$.
(i) Bewijs dat de rij (f_n) in $C[0,2]$ convergent is (gebruik de stelling van Dini).
(ii) Bereken $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx$ (gebruik opgave 87).

91. Laat $f \mapsto \|f\|$ de sup-norm zijn op $C[a,b]$.
Zij $c \in [a,b]$ en $\alpha > 0$.
Bewijs:
(i) de afbeelding $\|\cdot\|_1 : C[a,b] \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $\|f\|_1 = \sup_{x\in[a,b]} e^{-\alpha|x-c|}|f(x)|$ is een norm op $C[a,b]$.
(ii) er is een getal $K > 0$ zó dat voor alle $f \in C[a,b]$ geldt $K\|f\| \leq \|f\|_1 \leq \|f\|$.
(iii) $C[a,b]$, voorzien van de norm $f \mapsto \|f\|_1$, is volledig.

92. Bewijs dat voor iedere $a > 0$ de differentiaalvergelijking $y' = y$ op $[-a,a]$ juist één oplossing f heeft met $f(0) = 0$ en juist één oplossing g heeft met $g(0) = 1$.
Bepaal volgens het in (8.20) beschreven iteratieve proces rijen benaderende functies (f_n) en (g_n) met $f_0(x) = 0$ (voor alle $x \in [-a,a]$) en $g_0(x) = 1$ (voor alle $x \in [-a,a]$).
Bepaal vervolgens f en g.

93. Beschouw de differentiaalvergelijking $y' = \sqrt{|y|}$.
Bewijs dat op $[-1,+1]$ niet aan de Lipschitz voorwaarde is voldaan.

Bewijs dat de functies f en g, gedefinieerd door

$$f(x) = 0 \text{ voor alle } x \in [-1,+1] \text{ en}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 & \text{voor alle } x \in [-1,0] \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{voor alle } x \in [0,1]. \end{cases}$$

oplossingen zijn die voldoen aan $f(0) = 0$ en $g(0) = 0$.

94. (i) Bewijs dat de differentiaalvergelijking $y' = x \operatorname{arctg}(x^2 y)$ op $[-1,+1]$ precies één oplossing f heeft die voldoet aan $f(0) = 1$.

(ii) Laat (f_n) een rij benaderende functies zijn die met behulp van het in (8.21) aangegeven iteratieve proces geconstrueerd is. Bewijs dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $\|f_{n+1} - f_n\| \leq \frac{1}{4}\|f_n - f_{n-1}\|$, waarbij $\|f\| = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.

(iii) Bewijs dat voor alle $n,p \geq 0$ geldt: $\|f_{n+p} - f_n\| < \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{4})^n \|f_1 - f_0\|$.

(iv) Neem voor f_0 de functie $f_0(x) = 1$ (voor alle $x \in [-1,1]$) en bewijs $\|f_1 - f_0\| = \frac{1}{8}(\pi - \log 4) < \frac{1}{4}$.

(v) Bepaal n zó dat $\|f - f_n\| < 10^{-4}$.

Hoofdstuk III. Reeksen.

§9. Definities en voorbeelden.

(9.1) In het voorafgaande werden we enkele malen geconfronteerd met het probleem, een element a van een metrische ruimte V met een voorgeschreven precisie te benaderen met elementen van een deelverzameling A van V (vgl. §3, §6 vanaf (6.22)). Een veel voorkomende situatie is de volgende: V is een genormeerde lineaire ruimte, A is een lineaire deelruimte van V, en er bestaat een rij (a_n) in A met de eigenschap dat

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a.$$

In het volgende beschouwen we relaties van het type (*).

(9.2) In deze paragraaf is K het lichaam $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en $(E, \|\cdot\|)$ een Banachruimte over K.

Definities. Zij (a_n) een rij in E, $s \in E$.
" a_n is convergent, met som s" betekent:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = s.$$

Men noemt het symbool Σa_n, ook geschreven als $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, een reeks (in E); de elementen a_n heten de termen van de reeks, en $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ heet een (de n-de) partiële som van de reeks. Convergentie van Σa_n met som s betekent dus dat de rij (s_n) der partiële sommen van Σa_n convergent is met limiet s.
We schrijven

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Bestaat $\lim_{n\to\infty} s_n$ niet, dan noemen we de reeks Σa_n divergent.
Is $K \in \mathbb{Z}$ en is a een afbeelding $\{k \in \mathbb{Z} | k \geq K\} \to E$, dan geven we met $\sum_{n\geq K} a_n$ aan de reeks $a_K + a_{K+1} + \dots$ (waarbij $(\forall n \geq K) a_n = a(n)$); in plaats van $\sum_{n\geq 1} a_n$ schrijven we ook Σa_n. De partiële som s_n van $\sum_{n\geq K} a_n$ definiëren we door $s_n = \sum_{k=K}^{n} a_k$.

(9.3) <u>Stelling</u>. Σa_n is convergent $\Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p > 0)\|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\| < \varepsilon.$$

<u>Bewijs</u>: uit de volledigheid van E volgt dat Σa_n convergent is dan en slechts dan als (s_n) een Cauchy-rij is; verder is

$$s_{n+p}-s_n = a_{n+1}+a_{n+2}+ \dots +a_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

(9.4) <u>Voorbeelden</u>.

1. $E = \mathbb{R}$; $\Sigma\frac{1}{n^2}$ is convergent, want voor alle $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ is

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

dus

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

voor alle $n > \frac{1}{\varepsilon}$ en alle $p > 0$; pas nu (9.3) toe.

2. $E = \mathbb{R}$; $\Sigma\frac{1}{n}$ is divergent, want voor alle $n \in \mathbb{N}$ is

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \tfrac{1}{2};$$

pas nu (9.3) toe.

3. $E = \mathbb{R}$; $\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ is convergent: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is

$$s_{2n} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) - \frac{1}{2n} < 1, \quad s_{2n+2}=s_{2n}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right),$$

dus de rij (s_{2n}) der partiële sommen met een even aantal termen is naar boven begrensd en (strikt) monotoon stijgend. Er volgt dat $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$ bestaat. Aangezien $s_{2n-1}= s_{2n}+ \frac{1}{2n}$ bestaat ook $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$; er volgt dat $\lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat (ga na).

4. Is E een Banachalgebra en is $x \in E$, $\|x\| < 1$, dan is Σx^n convergent:

$$\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x\|^k$$

(multipliciteit van de norm!) en de laatste uitdrukking is kleiner dan

$$\frac{\|x\|^{n+1}}{1-\|x\|};$$

pas nu (9.3) toe.

Bijzondere gevallen:

<u>a</u>. $E = \mathbb{C}$; $z \in \mathbb{C}$, $|z|<1$, dan is $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ convergent.

Uit $s_n = 1+z+ \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ volgt dat $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

b. $E = M(n,n)$, met (multiplicatieve) norm

$\|(a_{ij})\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Is $A \in M(n,n)$, $\|A\| < 1$, dan is $\sum_{m\geq 0} A^m$ convergent; hierin definiëren we $A^0 = I$, de eenheidsmatrix. We bewijzen dat

$$s = \sum_{m=0}^{\infty} A^m = (I-A)^{-1}$$

(vgl. a!): $(I-A)s_m = \sum_{k=0}^{m} A^k - \sum_{k=1}^{m+1} A^k = I-A^{m+1}$ dus

$(I-A)s = \lim_{m\to\infty} (I-A)s_m = I$.

(9.5) Stelling.

a. Is Σa_n convergent, dan geldt $a_n \to 0$.

b. Voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt:

Σa_n is convergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq N} a_n$ is convergent.

Bewijs: zij $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, t_n = \sum_{k=N}^{n} a_k$ $(n \geq N)$. a volgt uit $a_n = s_n - s_{n-1}$ $(n > 1)$; b volgt uit $s_n = s_{N-1}+t_n$.

(9.6) Voorbeelden.

1. Uit $a_n \to 0$ volgt niet dat Σa_n convergent is; vgl. (9.4),2.

2. $E = \mathbb{C}$; is $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$, dan is Σz^n divergent.Immers $|z^n| = |z|^n \geq 1$; pas nu (9.5),a toe.

(9.7) Uit de in §8 behandelde rekenregels voor limieten van rijen volgt:

Stelling. Zijn (a_n) en (b_n) rijen in E, is $\lambda \in K$, en zijn Σa_n en Σb_n convergent met sommen resp. s en t, dan zijn ook $\Sigma(a_n+b_n)$ en $\Sigma\lambda a_n$ convergent, met sommen resp. $s+t$ en λs. Is E bovendien een Banachalgebra en is $c \in E$, dan is ook Σca_n convergent, met som cs. [Uit de convergentie van Σa_n en Σb_n volgt niet die van $\Sigma a_n b_n$; zie de opgaven.]

(9.8) Stelling. ("plaatsing van haakjes").

Laat Σa_n convergent zijn; laten s en s_n resp. de som en de n-de partiële som van Σa_n zijn.

Zij ϕ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strikt monotoon stijgend; definieer b_n door $b_1 = s_{\phi(1)}$, $b_n = s_{\phi(n)} - s_{\phi(n-1)}$ voor $n > 1$.
Dan is Σb_n convergent, met som s.

Bewijs: is t_n de n-de partiële som van Σb_n, dan is

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = s_{\phi(1)} + \sum_{k=2}^{n} \{s_{\phi(k)} - s_{\phi(k-1)}\} = s_{\phi(n)} \quad (n > 1).$$

Er volgt dat $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{\phi(n)} = s$ (ga na).

(9.9) Opmerking. In een convergente reeks mag men niet zonder meer "haakjes weglaten". Zo ontstaat uit de convergente reeks

$$\Sigma(1-1) = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

door het weglaten der haakjes de divergente reeks

$$1-1 + 1-1 + 1-1 + \ldots$$

(9.10) Definitie. Σa_n heet absoluut convergent indien $\Sigma\|a_n\|$ convergent is.

(9.11) Stelling. Σa_n is absoluut convergent $\Rightarrow$ Σa_n is convergent.
Bewijs: er geldt $\|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \|a_k\|$; pas nu (9.3) toe.

(9.12) Opmerking. In (9.11) geldt "$\Leftarrow$" niet. Zo is $\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ convergent maar niet absoluut convergent (zie (9.4), 2 en 3).

(9.13) Stelling ("omschikking der termen").
Is Σa_n absoluut convergent, en is ϕ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie, dan is $\Sigma a_{\phi(n)}$ convergent, en

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Bewijs: laat s de som van a_n zijn, en laten s_n en t_n de n-de partiële sommen van resp. Σa_n en $\Sigma a_{\phi(n)}$ zijn. Zij $\varepsilon > 0$. Uit de convergentie van $\Sigma\|a_n\|$ volgt dat er $N \in \mathbb{N}$ is zó dat

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_k\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Voor alle $p > 0$ is dan

$$\|s_{N+p} - s_N\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{N+p} \|a_k\| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \|a_k\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

en dus

$$\|s - s_N\| = \lim_{p\to\infty} \|s_{N+p} - s_N\| < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

(aangezien de norm continu is).

We vergelijken nu met elkaar s_n en t_k. Is $M = \max_{1\leq i\leq N} \phi^{-1}(i)$, dan geldt voor alle $k \geq M$: t_k bevat alle termen die in s_N voorkomen (ga na), dus

$$\|t_k - s\| \leq \|t_k - s_N\| + \|s_N - s\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|a_n\| + \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Er volgt dat $\lim_{k\to\infty} t_k = s$.

(9.14) Opmerking. In een niet absoluut convergente reeks mag men de volgorde van de termen niet zonder meer veranderen. Als voorbeeld beschouwen we

$$\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$ (som en n-de partiële som s resp. s_n)

en daarnaast de reeks

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$ (som en n-de partiële som t resp. t_n)

die uit de eerste door een omschikking van de termen (neem afwisselend twee positieve termen en een negatieve term) ontstaat.

Noem $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, dan is

$$s_{2n} = (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2n}) - 2(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n}) = u_{2n} - u_n$$

en

$$\begin{aligned} t_{3n} &= (1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{4n-1}) - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n}) = \\ &= u_{4n} - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{4n}) - \tfrac{1}{2}u_n = u_{4n} - \tfrac{1}{2}u_{2n} - \tfrac{1}{2}u_n = \\ &= (u_{4n} - u_{2n}) + \tfrac{1}{2}(u_{2n} - u_n) = s_{4n} + \tfrac{1}{2}s_{2n} \end{aligned}$$

waaruit volgt $\lim_{n\to\infty} t_{3n} = \frac{3}{2}s$ en dus ook $\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{3}{2}s$ (ga na).

Men kan bewijzen dat men uit elke convergente maar niet absoluut convergente reeks met reële termen door omschikken van de termen een convergente reeks met willekeurig voorgeschreven som, en ook een divergente reeks, kan verkrijgen.

(9.15) Stelling (produkt van twee reeksen).

Zij $(E,\|\cdot\|)$ een Banachalgebra. Laten $\sum_{n\geq 0} a_n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n$ absoluut convergente reeksen in E zijn, met sommen resp. s en t.

Dan is $\sum_{n\geq 0} c_n$ waarin

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

absoluut convergent, met som st.

Bewijs: uit

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{m} \|c_n\| \leq \left(\sum_{k=0}^{m} \|a_k\|\right)\left(\sum_{l=0}^{m} \|b_l\|\right) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \|b_l\|\right)$$

volgt dat de partiële sommen van $\sum_{n\geq 0} \|c_n\|$ een monotoon stijgende naar boven begrensde rij vormen, dus dat $\sum_{n\geq 0} c_n$ absoluut convergent is. Uit

$$\sum_{n=0}^{2N} c_n = \sum_{0\leq k+l\leq 2N} a_k b_l = \left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{N} b_l\right) + \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=N+1}^{2N+k} a_k b_l + \sum_{l=0}^{N} \sum_{k=N+1}^{2N-l} a_k b_l$$

volgt dat

$$\left\| \sum_{n=0}^{2N} c_n - \left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{N} b_l\right)\right\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{N} \|a_k\|\right)\left(\sum_{l=N+1}^{2N} \|b_l\|\right) + \left(\sum_{l=0}^{N} \|b_l\|\right)\left(\sum_{k=N+1}^{2N} \|a_k\|\right)$$

en limietovergang $N \to \infty$ leert ons dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{2N} c_n = st$$

(ga na).

Opmerking. Zij ϕ een aftelling van de verzameling van alle geordende paren gehele getallen (k,l) met $k \geq 0$, $l \geq 0$, d.w.z. een bijectie $\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$; zij $\phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n))$, $d_n = a_{\phi_1(n)} b_{\phi_2(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Met behulp van een analogon van (*) bewijst men dat Σd_n absoluut convergent is; uit (9.13) en (9.8) volgt nu dat $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = st$.

(9.16) Voorbeeld. $E = \mathbb{R}$; zij $x \in E$, $|x| < 1$. Dan is

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (x^k)(x^{n-k}) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

§10. Reeksen met reële niet-negatieve termen.

(10.1) Stelling. Is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq 0$, dan geldt:
Σa_n is convergent $\Leftrightarrow$ de rij der partiële sommen (s_n) van Σa_n is naar boven begrensd.
Bewijs: de rij (s_n) is monotoon stijgend en is dus convergent dan en slechts dan als hij naar boven begrensd is.

(10.2) Opmerking. Is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq 0$, dan is de reeks Σa_n convergent dan en slechts dan als hij absoluut convergent is.

(10.3) Stelling (integraalkenmerk). Zij $N \in \mathbb{N}$; zij $f : [N,\infty) \to \mathbb{R}$ continu, monotoon dalend en positief. Noem $a_n = f(n)$; dan geldt:

$$\sum_{n \geq N} a_n \text{ is convergent} \Leftrightarrow \int_N^\infty f(x)dx \text{ is convergent.}$$

Bewijs: uit de continuïteit en de monotonie van f volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

dus

$$(*) \quad f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 0 \text{ en } (**) \int_N^n f(x)dx \leq \sum_{k=N}^{n-1} f(k).$$

Noem

$$(***) \quad b_n = \sum_{k=N}^{n} f(k) - \int_N^n f(x)dx \quad (n > N).$$

Volgens (**) is de rij (b_n) naar beneden begrensd; uit (*) volgt dat (b_n) monotoon dalend is. We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} b_n$ (als reëel getal) bestaat; er volgt dat $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=N}^{n} a_k$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty} \int_N^n f(x)dx$ bestaat (ga na).

(10.4) Voorbeelden.
1. $N = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Met (6.13),1 volgt: $\Sigma \frac{1}{n^p}$ is convergent als $p > 1$ en divergent als $p \leq 1$ (vgl. ook (9.4),1 en 2).
2. $N = 2$, $f(x) = \frac{1}{x \log x}$.

Uit
$$\lim_{p\to\infty} \int_2^p \frac{dx}{x \log x} = \lim_{p\to\infty} [\log \log p - \log \log 2] = +\infty$$
volgt dat $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n \log n}$ divergent is.

3. $N = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Uit het bewijs van (10.3) volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (als reëel getal) bestaat, met b_n als in (***). Er volgt dat
$$\lim_{n\to\infty} (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n) = \gamma$$
(als reëel getal) bestaat; γ heet de constante van Euler ($\gamma = 0{,}5772\ldots$).

(10.5) Stelling (majorantie).
Is $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq a_n \leq b_n$ en is Σb_n convergent, dan is ook Σa_n convergent.
Bewijs: dit volgt uit $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} b_k\right|$, door toepassing van (9.3).

(10.6) Uit (10.5) volgt:
a. Is $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq 0$ en $c_n > 0)$, bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = m$ (als reëel getal) en is Σc_n convergent, dan is Σa_n convergent.
Immers: $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) a_n < (m+1)c_n$; volgens (10.5) (neem $b_n = (m+1)c_n$) is $\sum\limits_{n\geq N+1} a_n$ convergent en dus is ook Σa_n convergent.
b. Is $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq a_n \leq b_n$ en is Σa_n divergent, dan is ook Σb_n divergent (uit het ongerijmde).

(10.7) Voorbeelden.
1. $\Sigma\frac{1}{n(n+1)}$ is convergent, want $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ en $\Sigma\frac{1}{n^2}$ is convergent (vgl. (10.4),1; zie ook (9.4),1).
2. $\Sigma\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ is divergent: uit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ volgt dat er $N \in \mathbb{N}$ is zó dat $(\forall n > N)\ \sqrt[n]{n} < 2$, dus $(\forall n > N)\ \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{2n}$, terwijl $\Sigma\frac{1}{n}$ divergent is.

3. $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ is convergent: $(\log n)^{\log n} = e^{\log n \,\mathrm{loglog}\, n} =$ $= n^{\mathrm{loglog}\, n}$; er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat $(\forall n > N)$ loglog $n > 2$, dus voor alle $n > N$ is $\frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \frac{1}{n^2}$, terwijl $\Sigma\frac{1}{n^2}$ convergent is.

4. $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{2n^2-3}$ is convergent, want $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2-3} \Big/ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}$, en $\Sigma\frac{1}{n^2}$ is convergent.

(10.8) Stelling (kenmerk van Cauchy). Is $(\forall n \in \mathbb{N})a_n \geq 0$, dan geldt:
Is limsup $\sqrt[n]{a_n} < 1$, dan is Σa_n convergent;
is limsup $\sqrt[n]{a_n} > 1$, dan is Σa_n divergent.
Bewijs: a. Veronderstel dat $0 \leq a =$ limsup $\sqrt[n]{a_n} < 1$; zij $a < r < 1$. Aangezien a het grootste limietpunt van de rij $(\sqrt[n]{a_n})$ is zijn er hoogstens eindig veel n met $\sqrt[n]{a_n} > r$; er is dus $N \in \mathbb{N}$ zó dat $(\forall n \geq N)\sqrt[n]{a_n} \leq r$ en dus $a_n \leq r^n$. Uit de convergentie van Σr^n (zie (9.4),4) volgt die van $\sum\limits_{n\geq N} a_n$ en dus ook die van Σa_n.
b. Veronderstel dat limsup $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Is limsup $\sqrt[n]{a_n} = +\infty$, dan is de rij $(\sqrt[n]{a_n})$ niet naar boven begrensd; is limsup $\sqrt[n]{a_n}$ een reëel getal $a > 1$, dan zijn er oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ met $\sqrt[n]{a_n} > 1$. In beide gevallen zijn er oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ met $a_n > 1$; volgens (9.5),a is Σa_n divergent.

(10.9) Opmerkingen.
1. Uit (10.8) volgt: is $(\forall n \in \mathbb{N})a_n \geq 0$ en bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = m$, dan geldt: is $m < 1$, dan is Σa_n convergent, en is $m > 1$, dan is Σa_n divergent.
2. Uit "limsup $\sqrt[n]{a_n} = 1$" volgt nóch convergentie, nóch divergentie. Zo is Σa_n met $a_n = \frac{1}{n}$ divergent, met $a_n = \frac{1}{n^2}$ convergent; in beide gevallen is limsup $\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(10.10) Voorbeeld.
$\Sigma n^a r^n$ is convergent voor alle $a \in \mathbb{R}$ en alle $r \in \mathbb{R}$ met $0 \leq r < 1$, want

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a r^n} = \lim_{n\to\infty} r e^{\frac{a \log n}{n}} = r < 1.$$

(10.11) <u>Hulpstelling</u>. Is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$, dan is

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

<u>Bewijs</u>: de tweede ongelijkheid is triviaal. We bewijzen de derde ongelijkheid; de eerste wordt op analoge wijze bewezen. De derde ongelijkheid is waar indien $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$; veronderstel nu dat $0 \leqslant a = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < +\infty$. Zij $\varepsilon > 0$. Aangezien a het grootste limietpunt van de rij $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ is, is er $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geqslant N$ geldt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < a+\frac{1}{2}\varepsilon$, en dus geldt voor alle $n \geqslant N+1$:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N < (a+\tfrac{1}{2}\varepsilon)^{n-N} a_N$$

(te bewijzen met behulp van volledige inductie) waaruit volgt

$$\sqrt[n]{a_n} < (a+\tfrac{1}{2}\varepsilon) \cdot \left[\frac{a_N}{(a+\frac{1}{2}\varepsilon)^N}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

De limiet van het rechterlid voor $n \to \infty$ is $a+\frac{1}{2}\varepsilon$ (ga na); aangezien $a + \frac{1}{2}\varepsilon < a + \varepsilon$ is er dus $M \in \mathbb{N}$ met $M \geqslant N+1$ zó dat voor alle $n > M$ geldt $\sqrt[n]{a_n} < a+\varepsilon$. Er volgt dat $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leqslant a$.

(10.12) <u>Opmerking</u>. Uit (10.11) volgt: is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$ en bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dan bestaat ook $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, en dan zijn beide limieten gelijk. Voor de rij (a_n) met $a_n = 2 + (-1)^n$ geldt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (ga na) en $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$, $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$; uit het bestaan van $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ volgt dus <u>niet</u> het bestaan van $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(10.13) Een onmiddellijk gevolg van (10.8) en (10.11) is:
<u>Stelling (kenmerk van d'Alembert)</u>. Is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$, dan geldt:
Is $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, dan is Σa_n convergent;
is $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, dan is Σa_n divergent.

(10.14) <u>Opmerkingen</u>.

<u>1</u>. Uit (10.13) volgt: is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$ en bestaat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = m$, dan geldt: is $m < 1$, dan is Σa_n convergent, en is $m > 1$, dan is Σa_n divergent.

<u>2</u>. Geef zelf voorbeelden van rijen (a_n) met $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$ waaruit blijkt dat uit elk van de uitspraken "$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$", "$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$", "$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$", "$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$" nóch convergentie, nóch divergentie volgt.

(10.15) Voorbeeld. Voor alle $a \in \mathbb{R}$ is $\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$ convergent, want voor alle $a \neq 0$ geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{|a|^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 \text{ (vgl. (9.11)).}$$

Met (9.5),a volgt nog dat

$$(*) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

(hetgeen ook rechtstreeks te bewijzen is).

Volgens de formule van Taylor (zie (2.10)) is er voor elke $a \in \mathbb{R}$ en elke $n \in \mathbb{N}$ een ξ tussen 0 en a met

$$e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + R_n(0;a)$$

waarin

$$|R_n(0;a)| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}\right| \leq \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|a|}$$

dus $\lim_{n\to\infty} R_n(0;a) = 0$ (vgl. (*)). We concluderen:

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a.$$

(10.16) Is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, dan leveren (10.8) en (10.13) geen uitsluitsel ten aanzien van de convergentie van Σa_n. Soms is dit uitsluitsel dan te verkrijgen met behulp van het volgende kenmerk:

Stelling (kenmerk van Raabe). Is $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$ en bestaat

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = m,$$

dan geldt: is $m < -1$, dan is Σa_n convergent, en is $m > -1$, dan is Σa_n divergent.

Bewijs: is $m < -1$, dan is er $p > 1$ zó dat $m < -p < -1$. Noem $b_n = \frac{1}{n^p}$ $(n \in \mathbb{N})$; uit

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-p}-1}{x} = [-p(1+x)^{-p-1}]_{x=0} = -p$$

volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-p}-1\right] = -p.$$

Er volgt (ga na) dat er $N \in \mathbb{N}$ is zó dat $(\forall n \geq N)$:

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \leq n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right), \text{ en dus } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Voor alle $n > N$ is dus

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{N+1}}{b_N} \cdot a_N =$$
$$= \frac{a_N}{b_N} \cdot b_n$$

(te bewijzen m.b.v. volledige inductie), en uit de convergentie van $\sum_{n \geqslant N} \frac{a_N}{b_N} \cdot b_n$ volgt (met (10.5)) die van Σa_n.

Is $m > -1$, dan is er $p < 1$ zó dat $-1 < -p < m$. Is $b_n = \frac{1}{n^p}$ $(n \in \mathbb{N})$, dan is Σb_n divergent, en met een redenering als boven zien we: $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) a_n \geqslant \frac{a_N}{b_N} \cdot b_n$. Met (10.6), b volgt de divergentie van Σa_n.

(10.17) Voorbeeld. $a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot(2n+1)}$;

er geldt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$, dus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, en

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-6n-5)}{(2n+2)(2n+3)} = -\frac{3}{2};$$

met (10.16) volgt dat Σa_n convergent is.

(10.18) Bij het convergentieonderzoek van reeksen kan de volgende stelling soms goede diensten bewijzen:

Stelling.

(*) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = c.$

bestaat (als reëel getal), en $c > 0$.

Bewijs: noem

$$b_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N});$$

er geldt $b_{n+1}/b_n = en^{n+\frac{1}{2}}/(n+1)^{n+\frac{1}{2}}$ dus

$$\log b_{n+1} - \log b_n = -(n+\tfrac{1}{2}) \log (1+\tfrac{1}{n})+1.$$

We beschouwen de reeks Σa_n met $a_n = -(n+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{n})+1$. Uit de formule van Taylor volgt dat er voor elke $x > 0$ een ξ tussen 0 en x is zó dat

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$$

dus

$$-(\frac{1}{x} + \tfrac{1}{2})\log(1+x) + 1 = \tfrac{1}{4}x^2 - \frac{x^2}{3(1+\xi)^3} - \frac{x^3}{6(1+\xi)^3}.$$

Er volgt (aangezien $1+\xi \geqslant 1$) dat

$$(\forall x > 0)\left|-(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{2})\log(1+x) + 1\right| \leqslant \tfrac{7}{12}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3,$$

en dus

$$(\forall n \in \mathbb{N})|a_n| \leqslant \frac{7}{12n^2} + \frac{1}{6n^3} \leqslant \tfrac{3}{4} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Uit de convergentie van $\Sigma\frac{1}{n^2}$ volgt de (absolute) convergentie van Σa_n; er volgt dat $\lim_{n\to\infty} \log b_n = \lim_{n\to\infty} [\log b_1 + \sum_{k=2}^{n} (\log b_k - \log b_{k-1})]$ bestaat. Substitutie in de functie exp leert ons dat

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

bestaat en > 0 is.

Opmerkingen.

1. Men schrijft wel $n! \sim cn^n e^{-n}\sqrt{n}$; vgl. Inf. (2.45).
2. We zullen later bewijzen dat $c = \sqrt{2\pi}$; met $c = \sqrt{2\pi}$ heet (*) de formule van Stirling.

Voorbeeld. $a_n = \dfrac{n^n}{e^n n!}$; er geldt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ (ga na).
Uit $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} = \dfrac{1}{c} > 0$ volgt: $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)a_n = \dfrac{n^n}{e^n n!} \geqslant \dfrac{1}{2c}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; uit de divergentie van $\Sigma\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ volgt (met (10.6),b) die van Σa_n.

(10.19) Uit het bovenstaande volgen criteria voor de absolute convergentie van reeksen in Banachruimten. We vermelden apart:

Stelling. Zij $(E,\|\cdot\|)$ een (reële of complexe) Banachruimte, Σa_n een reeks in E. Dan geldt:
Is $\limsup \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$, dan is Σa_n absoluut convergent;
is $\limsup \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$, dan is Σa_n divergent;
is $\limsup \dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1$, dan is Σa_n absoluut convergent;
is $\liminf \dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1$, dan is Σa_n divergent.

Bewijs: de eerste uitspraak volgt uit (10.8), de derde uit (10.13). Volgens (10.11) volgt de vierde uitspraak uit de tweede; we bewijzen daarom alleen de tweede uitspraak.

[Merk op dat deze niet uit (10.8) volgt, immers uit de divergentie van $\Sigma\|a_n\|$ volgt niet die van Σa_n; vgl. (9.12).]
Uit $\limsup \sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$ volgt: er zijn oneindig veel $n \in \mathbb{N}$ met $\sqrt[n]{\|a_n\|} > 1$, dus $\|a_n\| > 1$ (vgl. het bewijs van (10.8)); volgens (9.5),a is Σa_n divergent.

(10.20) Voorbeeld. $E = \mathbb{C}$, $a_n = \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$, waarin α een niet geheel complex getal is. Uit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \Big/ \frac{1}{n^2} = 1$$

volgt dat Σa_n absoluut convergent en dus ook convergent is.

(10.21) Toepassing: de exponentiële functie.
Is E een Banachalgebra en is $x \in E$, dan is $\Sigma \frac{x^n}{n!}$ absoluut convergent en dus convergent, immers

$$\left\|\frac{x^n}{n!}\right\| = \frac{1}{n!}\|x^n\| \leqslant \frac{1}{n!}\|x\|^n;$$

pas nu (10.15) en (10.5) toe.
Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (zie (10.15)). Voor $E = \mathbb{C}$ of $M(n,n)$ definiëren we nu de exponentiële functie $\exp : E \to E$ door

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

We definiëren hierbij $(\forall z \in \mathbb{C}) z^0 = 1$ en $(\forall A \in M(n,n)) A^0 = I$ (de eenheidsmatrix). We schrijven ook $\exp x = e^x$.
Volgens (9.15) is, voor alle $x,y \in E$:

$$(\exp x)(\exp y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

met

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Voor alle $x,y \in \mathbb{C}$ of voor alle $x,y \in M(n,n)$ die commuteren (d.w.z. waarvoor geldt $xy = yx$) is dus

$$c_n = (x+y)^n/n!$$

en

$$(\exp x)(\exp y) = \exp (x+y).$$

§11. Uniforme convergentie.

(11.1) In deze paragraaf is K het lichaam $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.
Zij X een verzameling, E de algebra (over K) der begrensde functies $X \to K$, $\|\cdot\|$ de sup-norm op E. Zij (f_n) een rij in E, $f \in E$.

(11.2) Definities.

a. Σf_n heet puntsgewijs convergent op X, met som(functie) f, indien voor elke $x \in X$ de reeks $\Sigma f_n(x)$ in K convergeert, met som f(x).

b. Σf_n heet uniform convergent op X, met som(functie) f, indien Σf_n convergeert in $(E,\|\cdot\|)$, met som f.

(11.3) Uit het eerder behandelde volgt (ga na):

a. Σf_n is uniform convergent op X, met som f $\Leftrightarrow$ de rij (s_n) der partiële sommen van Σf_n convergeert naar f uniform op X (vgl. (5.3)).

b. Σf_n is uniform convergent op X, met som f $\Rightarrow$ Σf_n is puntsgewijs convergent op X, met som f (vgl. (5.3)).

c. Σf_n is uniform convergent op X, met som f $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in X)\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon$ (vgl. (5.3)).

d. Σf_n is uniform convergent op X $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p > 0)\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\right\| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p > 0)(\forall x \in X)\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$
(vgl. (6.6),5).

e. Is X een metrische ruimte en is Σf_n een op X uniform convergente reeks continue begrensde functies met som f, dan is f continu (vgl. (8.14)).

f. Zij X een compacte metrische ruimte; veronderstel dat $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \in C(X)$ en dat $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X) f_n(x) \geqslant 0$. Is Σf_n puntsgewijs convergent op X met som f en is f continu, dan is Σf_n uniform convergent op X met som f (vgl. (8.17)).

(11.4) Voorbeelden.

1. $K = \mathbb{R}$, $X = [0,\frac{1}{2}]$. Σx^n is uniform convergent op $[0,\frac{1}{2}]$, met som $\frac{x}{1-x}$, want

$$(\forall x \in [0,\tfrac{1}{2}])\left|\frac{x}{1-x} - \sum_{k=1}^{n} x^k\right| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant (\tfrac{1}{2})^n;$$

pas nu (11.3), a toe.

Het kan ook anders: Σx^n is puntsgewijs convergent op $[0,\frac{1}{2}]$ met som $\frac{x}{1-x}$ (vgl. (9.4),4), $\frac{x}{1-x}$ is continu op $[0,\frac{1}{2}]$, en $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0,\frac{1}{2}])x^n \geqslant 0$; pas nu (11.3), f toe.

2. $K = \mathbb{R}$, $X = [0,1]$. $\Sigma(1-x)x^n$ is niet uniform convergent op $[0,1]$, want de reeks convergeert puntsgewijs op $[0,1]$ met discontinue som f:

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ als } x \in [0,1) \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Pas nu (11.3), b en e toe.

3. $K = \mathbb{R}$, $X = (0,1)$. Σx^n is niet uniform convergent op $(0,1)$: er geldt

(*) $(\forall n \in \mathbb{N}) \lim_{x\uparrow 1} |x^{n+1}| = 1.$

We passen nu (11.3), d toe: uit de uniforme convergentie van Σx^n op $(0,1)$ zou volgen (neem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $n > N$ vast, $p = 1$):

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in (0,1))|x^{n+1}| \leqslant \tfrac{1}{2}$$

hetgeen in tegenspraak is met (*).

Het kan ook anders: uit de uniforme convergentie van Σx^n op $(0,1)$ zou (met (11.3), b) volgen dat Σx^n op $(0,1)$ puntsgewijs convergeert met som f waarbij f begrensd is op $(0,1)$. Echter is

$$(\forall x \in (0,1)) \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

en $\frac{x}{1-x}$ is niet begrensd op $(0,1)$; tegenspraak.

Opmerking. Hoewel $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in (0,1))x^n \geqslant 0$ en f continu is, is (11.3), f niet toepasbaar: $(0,1)$ is niet compact.

(11.5) Stelling (kenmerk van Weierstrasz).

Is a_n een convergente reeks met reële niet-negatieve termen, en is

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)|f_n(x)| \leqslant a_n$$

dan is Σf_n uniform convergent op X.

Bewijs: uit het gegeven volgt dat

$$(\forall n \in \mathbb{N})\|f_n\| \leqslant a_n;$$

pas nu (10.5) en (9.11) toe.

(11.6) Voorbeelden.

1. $K = \mathbb{C}$, $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. $\Sigma \frac{z^n}{n^2}$ is uniform convergent op X, want

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in X)\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

en $\Sigma \frac{1}{n^2}$ is convergent.

2. $K = \mathbb{C}$, $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1-\varepsilon\}$ waarin $0 < \varepsilon < 1$. Σz^n is uniform convergent op X, want

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in X)|z^n| \leqslant (1-\varepsilon)^n$$

en $\Sigma(1-\varepsilon)^n$ is convergent.

(11.7) Stelling (termsgewijze integratie van een reeks).

Zij (f_n) een rij functies in $C[a,b]$ zó dat Σf_n uniform convergent is op $[a,b]$. Dan is

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Bewijs: we voorzien $C[a,b]$ van de sup-norm $\|\cdot\|$, en we definiëren de afbeelding $I : C[a,b] \to \mathbb{R}$ door

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

We bewijzen dat I continu en zelfs uniform continu is:
er geldt

$$(\forall x \in [a,b])|f(x) - g(x)| \leqslant \|f-g\|$$

dus

$$|I(f) - I(g)| = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right| \leqslant (b-a)\|f-g\|.$$

Er volgt dat bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ te vinden is, namelijk $\delta = \varepsilon/(b-a)$, zó dat voor alle $f,g \in C[a,b]$ met $\|f-g\| < \delta$ geldt $|I(f) - I(g)| < \varepsilon$.

Noem $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$; volgens (11.3), e geldt $f \in C[a,b]$. In $(C[a,b],\|\cdot\|)$ geldt $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f (n \to \infty)$; uit de continuïteit van I volgt (vgl. (5.11)) dat

$$\sum_{k=1}^{n} I(f_k) = I(\sum_{k=1}^{n} f_k) \to I(f) \quad (n \to \infty)$$

en dus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)]dx.$$

(11.8) Voorbeeld.

Voor alle $a \in (0,1)$ is $\sum_{n\geq 0} x^n$ uniform convergent op $[0,a]$ (met som $\frac{1}{1-x}$), immers $(\forall x \in [0,a])|x^n| \leqslant a^n$ en $\sum_{n\geq 0} a^n$ is convergent; pas nu (11.5) toe.

We passen (11.7) toe: termsgewijze integratie van $\sum_{n\geq 0} x^n$ op $[0,a]$ leert ons dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = -\log(1-a) \quad (0 < a < 1).$$

Opgaven:

1. $M(2,2)$ is voorzien van de norm $A \mapsto \|A\| = \sum_{1\leq i,j\leq 2} |a_{ij}|$.
Zij $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ en $B = I - A$.
Bewijs dat $\sum_{n\geq 0} B^n$ convergent is en bereken A^{-1} met de methode van (9.4), voorbeeld 4b.

2. $M(2,2)$ is voorzien van de norm $A \mapsto \|A\| = \sum_{1\leq i,j\leq 2} |a_{ij}|$.
Zij $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$ met $|a| < \frac{1}{3}$.
Bewijs dat $\sum_{n\geq 0} A^n$ convergent is.
Leid hieruit af: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a^n = \frac{1}{(1-a)^2}$; vgl. (9.16).

3. Zij Σa_n een reeks in $\mathbb{R}$ met $a_n \geq 0$ voor alle n.
Bewijs:
Σa_n is convergent dan en slechts dan als $\Sigma \frac{a_n}{1+a_n}$ convergent is.

4. Laten Σa_n en Σb_n reeksen in $\mathbb{R}$ zijn.
Bewijs:
(i) de reeks $\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ is convergent; vgl. (9.4) voorbeeld 3.
(ii) Σa_n is convergent en Σb_n is convergent $\not\Rightarrow$ $\Sigma a_n b_n$ is convergent.
(iii) Σa_n is convergent en Σb_n is absoluut convergent $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Sigma a_n b_n$ is absoluut convergent.

5. Bewijs:
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.
(aanw. $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$).
(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \log(1 - \frac{1}{n^2}) = -\log 2$.
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\pi}{4}$.
(gebruik opgave II, 11, (iv) met $x = n+1$ en $y = -n$).

6. Laat zien dat in (9.15) de voorwaarde dat Σa_n en Σb_n beide absoluut convergent zijn niet noodzakelijk is. Beschouw daartoe bijv. de reeksen $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$ en $1 + 1 + 0 + 0 + 0 \ldots$

7. Bewijs de divergentie van de reeksen:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} \ldots\ldots$

(ii) $\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{4}{9} \ldots\ldots$

(iii) $\frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} \ldots\ldots \quad (a \neq b)$

(iv) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots\ldots$

8. Bewijs dat de reeks $(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}) + (\frac{5}{4} - \frac{6}{5}) + (\frac{7}{6} - \frac{8}{7}) \ldots\ldots$ convergeert en dat de reeks $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \frac{7}{6} - \frac{8}{7} \ldots\ldots$ divergeert.

9. Bewijs:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

10. Zij Σa_n een reeks in $\mathbb{C}$ met $a_n \neq 0$ voor alle n.
Bewijs:

(i) als $\sqrt[n]{|a_n|} \downarrow 1$ voor $n \to \infty$ dan is Σa_n divergent.

(ii) als $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \downarrow 1$ voor $n \to \infty$ dan is Σa_n divergent.

11. Zij Σa_n een reeks in $\mathbb{R}$ met $a_n > 0$ voor alle n.
Bewijs:
als $n(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1) \downarrow -1$ voor $n \to \infty$ dan is Σa_n divergent.

12. Bewijs:

(i) $10 < \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{11}{10}} < 11$.

(ii) $\frac{1}{2}\pi < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{1}{2}(\pi+1)$.

13. Bewijs:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2.$

*(ii) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+4} + \ldots\ldots + \frac{1}{9n+1}\right) = \frac{1}{3}\log 3.$

14. Ga na of de volgende reeksen convergent zijn:

(i) $\Sigma(1 - \cos \frac{1}{n}).$

(ii) $\Sigma \sin \left(\frac{n}{n^2+1}\right).$

(iii) $\Sigma \cos \frac{1}{n^2}.$

(iv) $\Sigma\frac{(\log n)^3}{(\log_2 3)^n}.$

(v) $\Sigma(e^{n^{-2}} - 1).$

(vi) $\Sigma\frac{1}{n} \log \frac{n+1}{n}.$

(vii) $\Sigma(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}).$

15. Voor welke reële p zijn de volgende reeksen convergent?

(i) $\Sigma\frac{\log n}{n^p}.$

(ii) $\Sigma\frac{1}{n^p \log n}.$

(iii) $\Sigma n\, e^{-p\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$

(iv) $\Sigma\frac{1}{n} \left(\frac{pn+1}{n+1}\right)^n$ (laat $p = -1$ buiten beschouwing).

16. Bewijs de convergentie van de reeksen:

(i) $\Sigma n^{-n} \sin \frac{\pi}{3n}$

(ii) $\Sigma\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}} + \ldots\ldots$

(iv) $\Sigma 2^{-n + \log n}.$

(v) $\Sigma e^{-\sqrt{n}}.$

17. Bewijs:

(i) de reeks $\Sigma\frac{\binom{a+n}{n}}{\binom{b+n}{n}}$ $(a,b > 0)$ is convergent voor $a+1 < b$

en divergent voor $a+1 \geqslant b$.

(ii) de reeks $\Sigma\binom{a}{n}$ $(a \neq 0)$ is absoluut convergent voor $a > 0$ en divergent voor $a \leqslant -1$.

18. Bewijs dat de volgende reeksen uniform convergent zijn op $\mathbb{R}$:

(i) $\Sigma \frac{\operatorname{arctg} x}{n\sqrt{n}}$.

(ii) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\cos^n x}{n(\log n)^2}$.

(iii) $\Sigma \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t^4+x^2}}$.

(iv) $\Sigma \frac{x^3}{1+n^2x^4}$.

19. Bewijs: $\int_0^1 [\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}]\,dx = \gamma$ (constante van Euler).

20. De functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

Bewijs:

(i) De reeks Σf_n is puntsgewijs convergent op $\mathbb{R}$.

(ii) De reeks Σf_n is niet uniform convergent op $\mathbb{R}$.

(iii) Voor iedere deelverzameling A van $\mathbb{R}$ met $0 \notin \overline{A}$ geldt: Σf_n is uniform convergent op A.

21. X is een compacte metrische ruimte, Σf_n is een op X uniform convergente reeks begrensde functies $X \to \mathbb{C}$ en g is een continue functie $X \to \mathbb{C}$.

Bewijs dat de reeks $\Sigma g \cdot f_n$ uniform convergent op X is.

22. X is een metrische ruimte en (f_n) is een rij continue functies $X \to \mathbb{C}$.

Bewijs: als er bij iedere $a \in X$ een $\varepsilon > 0$ is zó dat Σf_n op $B(a;\varepsilon)$ uniform convergent is, dan is de som van Σf_n een continue functie $X \to \mathbb{C}$.

23. Bewijs: de som van de reeks $\Sigma \frac{1}{\sinh(nx)}$ is een continue functie $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$.

24. Bewijs: de som van de reeks $\Sigma(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n})$ is een continue functie $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

25. Zij $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ en $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.
Bewijs:
(i) de som van de reeks $\Sigma \frac{z^n}{z^n+1}$ is een continue functie $A \to \mathbb{C}$.
(ii) de som van de reeks $\Sigma \frac{1}{z^n+1}$ is een continue functie $B \to \mathbb{C}$.
*(iii) de som van de reeks $\Sigma \frac{(-1)^n}{n(z^n+1)}$ is een continue functie $A \to \mathbb{C}$.

26. X is een metrische ruimte; a is een verdichtingspunt van X.
Zij F(X) de complexe lineaire ruimte van alle functies $X \to \mathbb{C}$.
(i) Ga na dat, hoewel op F(X) geen sup-norm gedefinieerd kan worden, toch een definitie van "op X uniform convergente reeks" gegeven kan worden die voor begrensde functies samen valt met definitie (11.2) b.
(ii) Laat Σc_n een reeks in $\mathbb{C}$ zijn. Zij $(\forall n \in \mathbb{N}) f_n \in F(X)$, zij Σf_n uniform convergent op X en zij $(\forall n \in \mathbb{N}) \lim_{x\to a} f_n(x) = c_n$.
Bewijs: Σc_n is convergent, en $\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.
(iii) Bewijs: als Σf_n een op X uniform convergente reeks continue functies $X \to \mathbb{C}$ is met som f, dan is f continu.

27. Zij $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n \in C^1[a,b]$.
Veronderstel dat $\Sigma f_n(a)$ convergent is en dat $\Sigma f_n'$ uniform convergent is op $[a,b]$.
Bewijs:
(i) Σf_n is uniform convergent op $[a,b]$.
(ii) voor de som f van Σf_n geldt $f \in C^1[a,b]$ en $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

28. Bewijs dat voor alle $x \in (-1,1)$ geldt:
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}n(n^2+1)x^{n-1} = \frac{3x}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1-x)^2}$.

§12. Complexe machtreeksen.

(12.1) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $a \in \mathbb{R}$ willekeurig vaak differentieerbaar. We beschouwen de in (2.10) voorkomende formule van Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(a;x).$$

Indien $\lim_{n\to\infty} R_n(a;x) = 0$, dan is

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

We noemen de reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

de Taylorreeks van f in (of: om) a.

(12.2) Voorbeelden.

1. $f(x) = e^x$, $a = 0$. Er geldt $(\forall n \geq 0) f^{(n)}(0) = 1$, dus de Taylorreeks van e^x in 0 is $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Dit geval is in (10.15) behandeld: de Taylorreeks van e^x in 0 convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$, met som e^x.
2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$. Er geldt $(\forall n \geq 0) f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ (te bewijzen m.b.v. volledige inductie), dus de Taylorreeks van $\frac{1}{1+x}$ in 0 is $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$. Uit het in (9.4), 4a behandelde volgt dat de Taylorreeks van $\frac{1}{1+x}$ in 0 convergeert voor alle $x \in (-1,+1)$, met som $\frac{1}{1+x}$.
3. $f(x) = e^{-1/x^2}$ als $x \neq 0$, $f(0) = 0$; $a = 0$. M.b.v. volledige inductie is te bewijzen dat
$$(\forall n \geq 0)(\forall x \neq 0) f^{(n)}(x) = P_{3n}(\tfrac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}$$
waarin $P_{3n}(\frac{1}{x})$ een polynoom van de graad 3n in $\frac{1}{x}$ is; er volgt (ga na, weer m.b.v. volledige inductie) dat
$$(\forall n \geq 0) f^{(n)}(0) = 0.$$
De Taylorreeks van e^{-1/x^2} in 0 is dus $\sum_{n\geq 0} 0 = 0 + 0 + 0 + \ldots$; deze reeks is convergent voor alle $x \in \mathbb{R}$, met som 0. Blijkbaar kan het voorkomen dat de Taylorreeks van een functie f convergeert terwijl de som niet gelijk is aan f.

(12.3) Een <u>complexe machtreeks</u> (of: machtreeks in $\mathbb{C}$) is een reeks van de vorm $\sum_{n\geq 0} \alpha_n(z-\alpha)^n$ waarin $(\forall n \geq 0)\alpha_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Voorbeelden van machtreeksen zijn de boven besproken Taylorreeksen. In deze paragraaf bespreken we eigenschappen van complexe machtreeksen van de vorm $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$; met behulp van de substitutie $z-\alpha = w$ kan men overeenkomstige eigenschappen van machtreeksen van de vorm $\sum_{n\geq 0} \alpha_n(z-\alpha)^n$ (machtreeksen in $z-\alpha$) afleiden; door z,α en alle α_n in $\mathbb{R}$ te nemen vinden we de overeenkomstige eigenschappen van reële machtreeksen.
Het is niet moeilijk verscheidene van de in deze paragraaf voorkomende stellingen te generaliseren tot stellingen betreffende machtreeksen in een Banachalgebra (vgl. (9.4), 4 en (10.21)).
In het onderstaande is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ een complexe machtreeks.

(12.4) <u>Stelling</u>. Zij $r = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}$; definieer R door

$$R = \begin{cases} 1/r & \text{als } r \in \mathbb{R},\ r \neq 0 \\ +\infty & \text{als } r = 0 \\ 0 & \text{als } r = +\infty \end{cases}$$

Voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt nu:

$|z| < R \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ is absoluut convergent

$|z| > R \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ is divergent.

<u>Bewijs</u>: volgens (10.19) is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ absoluut convergent als $\limsup (|z|\sqrt[n]{|\alpha_n|}) < 1$ en divergent als $\limsup (|z|\sqrt[n]{|\alpha_n|}) > 1$. Is $r \in \mathbb{R}$, dan is $\limsup (|z|\sqrt[n]{|\alpha_n|}) = |z|r$ (ga na). Is $r \neq 0$, dan is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ dus absoluut convergent als $|z| < \frac{1}{r} = R$ en divergent als $|z| > \frac{1}{r} = R$; is $r = 0$, dan is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ absoluut convergent voor alle $z \in \mathbb{C}$ (dus voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < +\infty = R$). Is $r = +\infty$, dan is voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| > R = 0$ (d.w.z. voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $z \neq 0$): $\limsup (|z|\sqrt[n]{|\alpha_n|}) = +\infty$; voor die z is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ dus divergent.

(12.5) Opmerkingen.

1. Elke machtreeks $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ is convergent voor $z = 0$.

2. Men noemt R de convergentiestraal van de machtreeks, en men schrijft wel

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$$

Is $R < +\infty$, dan verstaan we onder de convergentiecirkel van de machtreeks de cirkel $\{z \in ¢ \mid |z| = R\}$.

3. Bestaat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = m$, dan is $R = \frac{1}{m}$; uit (10.11) volgt: bestaat $\lim_{n\to\infty} |\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}| = p$, dan is $R = \frac{1}{p}$ (met interpretaties voor de gevallen $m = 0$, $m = \infty$, $p = 0$, $p = \infty$ als in (12.4)).

(12.6) Voorbeelden.

1. $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$ (ga na) dus $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n+1}$ is absoluut convergent als $|z| < 1$ en divergent als $|z| > 1$.

2. $\alpha_n = \frac{n+1}{n!}$: $\lim_{n\to\infty} |\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$, dus $R = \infty$: $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)z^n}{n!}$ is voor alle $z \in ¢$ absoluut convergent.

3. $\alpha_n = (-1)^n n^n$: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, dus $R = 0$: $\sum_{n\geq 0} (-1)^n n^n z^n$ is voor alle $z \neq 0$ divergent.

4. (12.4) doet geen uitspraak over het gedrag van $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ op de convergentiecirkel. Zo hebben de reeksen $\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1}$ en $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$ alle convergentiestraal 1; de eerste is divergent op de cirkel $|z| = 1$, de laatste is convergent op de cirkel $|z| = 1$, en de tweede is convergent voor $z = -1$ maar divergent voor $z = +1$ (ga na).

(12.7) Stelling. Voor alle $K, K_0 \in \mathbb{N}$ met $K_0 \leq K$ hebben $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ en $\sum_{n\geq K} \alpha_n z^{n-K_0}$ dezelfde convergentiestraal.

Bewijs: volgens (9.5), b is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ convergent dan en slechts dan als $\sum_{n\geq K} \alpha_n z^n$ convergent is; voor alle $z \in ¢$, $z \neq 0$ geldt:

de reeks $\sum_{n\geqslant K} \alpha_n z^n$ is convergent dan en slechts dan als de reeks $z^{-K_0} \sum_{n\geqslant K} \alpha_n z^n = \sum_{n\geqslant K} \alpha_n z^{n-K_0}$ convergent is. Er volgt: $(\forall z \in ¢)$ $(\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ is convergent $\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant K} \alpha_n z^{n-K_0}$ is convergent); pas nu (12.4) toe.

(12.8) <u>Stelling (termsgewijze differentiatie van een machtreeks).</u>
Laat $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ de convergentiestraal R hebben. Definieer $f : \{z \in ¢ \,|\, |z| < R\} \to ¢$ door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

Dan is f differentieerbaar, en voor alle $z \in ¢$ met $|z| < R$ geldt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1}.$$

<u>Bewijs</u>: uit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ volgt dat $\limsup \sqrt[n]{|n\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ (ga na); $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ en $\sum_{n\geqslant 1} n\alpha_n z^{n-1}$ hebben dus dezelfde convergentiestraal (vgl. (12.7)). Voor elke c met $0 < c < R$ is $\sum_{n\geqslant 1} n|\alpha_n|c^{n-1}$ dus convergent (vgl. (12.4)).
Zij $\alpha \in ¢$, $|\alpha| < R$; zij c zó dat $|\alpha| < c < R$, en zij $U = \{z \in ¢ \,|\, |z-\alpha| < c - |\alpha|\}$. Voor alle $z \in U$, $z \neq \alpha$ is

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{z^n - \alpha^n}{z-\alpha}.$$

Definieer, voor alle $n \in \mathbb{N}$, $g_n : U \to ¢$ door

$$\begin{cases} g_n(z) = \alpha_n \dfrac{z^n-\alpha^n}{z-\alpha} & \text{als } z \in U,\ z \neq \alpha \\ g_n(\alpha) = n\alpha_n\alpha^{n-1} \end{cases}$$

Voor alle $z \in U$, $z \neq \alpha$ is $g_n(z) = \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}\alpha^k$. Er volgt dat $\lim_{z\to\alpha} g_n(z) = n\alpha_n\alpha^{n-1} = g_n(\alpha)$, dus dat elke g_n continu is; verder is $(\forall z \in U)|z| \leqslant c$, dus $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in U)|g_n(z)| \leqslant n|\alpha_n|c^{n-1}$.
Uit de convergentie van $\sum_{n\geqslant 1} n|\alpha_n|c^{n-1}$ volgt met (11.5) dat $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ uniform convergent is op U; met (11.3), <u>e</u> volgt nu dat

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z\to\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n\alpha^{n-1}.$$

<u>Opm.</u> De in (12.8) gedefinieerde f is <u>continu</u>; vgl. Inf. (3.30).

(12.9) Voorbeelden.

1. Zij $f : (-1,+1) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \log(1+x)$. Uit $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n \geq 1)$ volgt dat de Taylorreeks van $\log(1+x)$ in 0 is $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$. Met behulp van een schatting van de restterm in de formule van Taylor kan men bewijzen dat de som van deze reeks juist $\log(1+x)$ is; men kan dit ook als volgt bewijzen:
De convergentiestraal van de reeks is 1. Is $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ $(|x| < 1)$, dan is volgens (12.8): $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}x^{n-1} =$ $= \frac{1}{1+x}$ (vgl. (12.2), 2), dus er is $c \in \mathbb{R}$ zó dat $g(x) =$ $= \log(1+x) + c$ $(|x| < 1)$. Substitutie $x = 0$ levert $c = 0$; er volgt dat

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad (|x| < 1)$$

(vgl. (11.8)).

2. Zij $\alpha \in \mathbb{R}$, en zij $f : (-1,+1) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) =$ $= (1+x)^\alpha$. Er geldt $f^{(n)}(x) = n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$; de Taylorreeks van $(1+x)^\alpha$ in 0 is dus $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n}x^n$. Uit $\lim_{n\to\infty} \left|\binom{\alpha}{n+1}/\binom{\alpha}{n}\right| =$ $= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$ volgt dat de convergentiestraal van deze reeks 1 is. Zij $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n$, $h(x) = g(x)/(1+x)^\alpha$ $(|x| < 1)$.
Er geldt $h'(x) = [(1+x)g'(x) - \alpha g(x)]/(1+x)^{\alpha+1}$ en

$$(1+x)g'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha g(x)$$

dus $h'(x) = 0$; er is dus $c \in \mathbb{R}$ zó dat $g(x)/(1+x)^\alpha = h(x) = c$ $(|x| < 1)$.
Substitutie $x = 0$ leert ons dat $c = 1$; er volgt dat

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}x^n \quad (|x| < 1).$$

3. De in (12.2), 2 en (12.9), 1 genoemde reeksen zijn absoluut convergent voor alle x met $|x| < 1$; volgens (9.15) is dus

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} \cdot (-1)^{n-k}x^{n-k} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)x^n = x - (1+\tfrac{1}{2})x^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})x^3 - \ldots\ldots \quad (|x| < 1).$$

(12.10) <u>Eenduidigheid van een machtreeksontwikkeling</u>: is $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in een omgeving U van 0 in een machtreeks te ontwikkelen: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, dan is $(\forall n \geq 0)\alpha_n = f^{(n)}(0)/n!$. Immers volgens (12.8) geldt dan in U: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n \binom{n}{k} k! z^{n-k}$ $(k \geq 0)$, dus $f^{(k)}(0) = \alpha_k \cdot k!$ ofwel $\alpha_k = f^{(k)}(0)/k!$ $(k \geq 0)$.

Zo is de in (12.9), 3 gevonden reeks de Taylorreeks van $\log(1+x)/(1+x)$; er geldt dus

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{\log(1+x)}{1+x}\Big|_{x=0} = (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)n! \quad (n \geq 1).$$

<u>Toepassing: differentiaalvergelijkingen</u>.

(12.11) Bij het zoeken van een oplossing van een differentiaalvergelijking kan men soms met succes gebruik maken van de <u>methode van machtreekssubstitutie</u>. Men zoekt daarbij op een geschikt deel van $\mathbb{R}$ oplossingen die in een machtreeks zijn te ontwikkelen (d.w.z. die daar gelijk zijn aan de som van hun Taylorreeks).

(12.12) <u>Voorbeelden.</u>

<u>1</u>. $y' = 3y$.

Stel $f : (-R,+R) \to \mathbb{R}$ is op $(-R,+R)$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking, terwijl $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$. Dan is $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $(|x| < R)$, en dus (wegens $f' = 3f$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - 3a_n] x^n = 0 \quad (|x| < R).$$

Uit (12.10) volgt dat

$$(n+1)a_{n+1} - 3a_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

en dus is (volledige inductie) $a_n = \frac{3^n}{n!} a_0$ $(n \geq 0)$. De convergentiestraal van de reeks $\sum_{n \geq 0} a_0 \frac{3^n}{n!} x^n$ is ∞ (ga na); we concluderen dat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{3^n}{n!} x^n$ op $\mathbb{R}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking $y' = 3y$ is. Hierbij mag a_0 willekeurig in $\mathbb{R}$ gekozen worden; merk op dat $f(x) = a_0 e^{3x}$.

2. $x^3y' - 2y = 0$.

Het in voorbeeld 1 uitgevoerde substitutieproces formaliseren we als volgt: stel $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dan is $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ dus $x^3y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)a_{n-2}x^n$. Substitutie in $x^3y' - 2y = 0$ levert

$$-2a_0 - 2a_1x - 2a_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} [(n-2)a_{n-2} - 2a_n]x^n = 0.$$

Er volgt dat $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $(n-2)a_{n-2} - 2a_n = 0$ $(n \geqslant 3)$ dus $(\forall n \geqslant 0)a_n = 0$: de differentiaalvergelijking heeft geen niet-triviale oplossing in de vorm van een machtreeks in x. Merk op dat e^{-1/x^2} op $\mathbb{R}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking is; vgl. (12.2), 3.

3. $x(1-x)y'' + (2-3x)y' - y = 0$.

Substitutie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ levert

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+1} - (n+1)^2 a_n]x^n = 0$$

en dus

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}a_n \quad (n \geqslant 0).$$

M.b.v. volledige inductie volgt $a_n = \frac{1}{n+1}a_0$ $(n \geqslant 0)$. De reeks $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+1}$ heeft convergentiestraal 1; we concluderen dat voor elke $a_0 \in \mathbb{R}$ de functie $f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ op $(-1,+1)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking is.

Met behulp van (12.9), 1 zien we nog dat

$$\begin{cases} f(x) = -\dfrac{a_0 \log(1-x)}{x} & \text{als } 0 < |x| < 1 \\ f(0) = a_0 \end{cases}$$

(12.13) <u>Stelling</u>. Zij R de convergentiestraal van $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, $R > 0$. Dan geldt:

a. Is $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ $(|z| < R)$, dan is $\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha}_n \overline{z}^n$ $(|z| < R)$.

b. Voor alle $n \geqslant 0$ geldt:
(*) $(\exists \delta > 0)(\exists M > 0)(\forall z, |z| < \delta) \left|\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k z^k\right| \leqslant M|z|^n$.

c. Is $0 < r < R$, dan is $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ uniform convergent op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$.

Bewijs:

a volgt uit $|\overline{f(z)} - \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_k \overline{z}^k| = |f(z) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k|$ $(n \geq 0, |z| < R)$.

b. Zij $n \geq 0$ en $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k z^{k-n}$ $(|z| < R)$; er geldt $\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k z^k =$ $= z^n g(z)$. Zij $\delta < R$. Op de compacte verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \delta\}$ (vgl. (7.18)) is de continue functie g (vgl. (12.8)) begrensd (vgl. (7.14)); er is dus $M > 0$ zó dat $(\forall z, |z| < \delta)|g(z)| \leq M$.

c. Voor alle z met $|z| \leq r$ geldt $|\alpha_n z^n| \leq |\alpha_n| r^n$ $(n \geq 0)$; verder is $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n| r^n$ convergent. Pas nu (11.5) toe.

(12.14) Opmerkingen.

1. Men schrijft (*) (zie (12.13), b) wel als
$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k z^k = O(z^n)(z \to 0).$$
Er geldt
$$(\forall n \geq 0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k + O(z^{n+1})(z \to 0).$$
Vgl. Inf. (2.45) en (2.46).

2. Uit (12.13), c volgt: is $0 < r < R$, dan is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n x^n$ uniform convergent op $[-r,+r]$.

(12.15) Stelling (van Abel).

Zij R de convergentiestraal van $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$, $0 < R < \infty$; zij $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ $(|z| < R)$. Is $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = R$ en is $\sum_{n\geq 0} \alpha_n \alpha^n$ convergent, dan is
$$\lim_{t\uparrow 1} f(t\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \alpha^n.$$
Bewijs: voor alle $t \in [0,1)$ is $f(t\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \alpha^n t^n$; noem $\beta_n = \alpha_n \alpha^n$ $(n \geq 0)$, dan is $\sum_{n\geq 0} \beta_n$ convergent.

Noem $T_n = \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k$ $(n \geq 0)$; voor alle $n \in \mathbb{N}$ en alle $p > 0$ geldt:
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \beta_k t^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (T_k - T_{k+1}) t^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} T_k t^k - \sum_{k=n+2}^{n+p+1} T_k t^{k-1} =$$
$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} T_k (t^k - t^{k-1}) + T_{n+1} t^n - T_{n+p+1} t^{n+p}.$$

Zij $\varepsilon > 0$ en zij $N \in \mathbb{N}$ zó dat $(\forall n > N)|T_n| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Voor alle $n > N$, alle $p > 0$ en alle $t \in [0,1]$ is dan

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \beta_k t^k\right| \leq \tfrac{1}{3}\varepsilon(t^n - t^{n+p}) + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon;$$

met (11.3), d volgt dat $\sum_{n\geq 0} \beta_n t^n$ uniform convergent is op $[0,1]$. Volgens (11.3), e is de som van deze reeks een continue functie, dus

$$\lim_{t\uparrow 1} f(t\alpha) = \lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \alpha^n.$$

(12.16) Voorbeeld. Met behulp van (12.15) kan men in sommige gevallen de som van een machtreeks in een punt van zijn convergentie-cirkel bepalen. Zo is

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad (|x| < 1)$$

zie (12.9),1) terwijl $\Sigma(-1)^{n+1}/n$ convergent is (zie (9.4),3); toepassing van (12.15) geeft

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{t\uparrow 1} \log(1+t) = \log 2.$$

Toepassing: de elementaire functies.

A. De exponentiële functie.

(12.17) In (10.21) definieerden we de exponentiële functie $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

en we bewezen dat $\exp(z+w) = (\exp z)(\exp w)\ (z,w \in \mathbb{C})$.

We vermelden nog enkele eigenschappen van exp:

1° Voor reële x is e^x reëel; de reële functie $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werd bestudeerd in (1.10).

2° exp is overal in $\mathbb{C}$ differentieerbaar, met afgeleide exp (uit (12.8)).

3° Uit de definitie van afgeleide volgt dat

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

4°. Uit $(\forall z \in \mathbb{C}) e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$ volgt $(\forall z \in \mathbb{C}) e^z \neq 0$.

5°. Volgens (12.13), a is $|e^z|^2 = e^z \cdot e^{\bar{z}} = e^{2\text{Re } z}$, dus
$$|e^z| = e^{\text{Re } z}.$$
Er volgt dat
$$(\forall x \in \mathbb{R}) |e^{ix}| = 1.$$

B. De goniometrische functies.

(12.18) We definiëren de functies sin : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$
Onmiddellijk uit deze definities volgen de volgende eigenschappen van sin en cos:

1°. Voor reële x zijn $\sin x$ en $\cos x$ reëel.

2°. sin en cos zijn overal in $\mathbb{C}$ differentieerbaar, en
$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin$$
(uit (12.8)).

3°. Uit $\sin z = z + O(z^3)(z \to 0)$ en $\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)(z \to 0)$ (zie (12.13), b) volgt dat
$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \text{ en } \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \tfrac{1}{2}.$$

4°. sin is een oneven functie, cos is een even functie:
$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z \quad (z \in \mathbb{C}).$$

5°. $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (z \in \mathbb{C})$.

6°. $(\forall z, w \in \mathbb{C})$:
$$\sin(z+w) = \frac{1}{2i}[e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}] =$$
$$= \frac{1}{2i}[(\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) - (\cos z - i \sin z)\cdot(\cos w - i \sin w)] = \cos z \sin w + \sin z \cos w$$
$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$
$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$$
$$\cos 2z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

7°. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C})$.

Opmerking. sin en cos zijn niet begrensd; zo is voor alle $t \in \mathbb{R}$: $\cos it = \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{t})$ dus $\cos it \to +\infty \ (t \to +\infty)$.
Voor alle reële x geldt $|\sin x| \leqslant 1, |\cos x| \leqslant 1$.

8°. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

(12.19) Uit $\cos 0 = 1$ en $\cos 2 = 1-2+\frac{2}{3}-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{4k+2}}{(4k+2)!}-\frac{2^{4k+4}}{(4k+4)!}\right] < -\frac{1}{3}$ (vgl. (9.8)) volgt met de tussenwaardestelling dat er $x \in (0,2)$ is met $\cos x = 0$. We definiëren: $\pi = 2 \inf\{x \in (0,2) \mid \cos x = 0\}$. Er is een rij (x_n) in $(0,2)$ met $(\forall n \in \mathbb{N})\cos x_n = 0$ en $x_n \to \frac{\pi}{2}$; uit de continuïteit van cos volgt dat $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, en uit $\cos 0 = 1$ volgt dat $\frac{\pi}{2} > 0$, dus $\frac{\pi}{2}$ is het kleinste positieve nulpunt van cos.

Voor alle $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ is $\cos x > 0$, dus sin is op $[0,\frac{\pi}{2}]$ strikt monotoon stijgend; uit $\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = 1$ volgt nu dat $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Voor alle $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ is $\sin x > 0$, dus cos is op $[0,\frac{\pi}{2}]$ strikt monotoon dalend. Met (12.18),6° volgt dat

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x$$

waarmee het gedrag van sin en cos op $[\frac{\pi}{2},\pi]$ bekend is; in het bijzonder is $\sin \pi = 0$, $\sin x > 0$ voor alle $x \in (\frac{\pi}{2},\pi)$, $\cos \pi = -1$. Uit

$$\sin(\pi+x) = -\sin x, \quad \cos(\pi+x) = -\cos x$$

volgt het gedrag van sin en cos op $[\pi,2\pi]$; in het bijzonder is $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$. Tenslotte volgt uit

$$\sin(2\pi+x) = \sin x, \quad \cos(2\pi+x) = \cos x$$

dat sin en cos periodiek zijn met periode 2π, zodat hun gedrag op $\mathbb{R}$ bekend is.

(12.20) Alle nulpunten van sin zijn reëel: uit $\sin z = 0$ volgt $e^{2iz} = 1$, dus $|e^{2iz}| = e^{-2\,\mathrm{Im}\, z} = 1$ ofwel $\mathrm{Im}\, z = 0$. Analoog blijkt dat alle nulpunten van cos reëel zijn. De nulpunten van sin zijn $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; de nulpunten van cos zijn $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Uit het bovenstaande volgt nog:

$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$;

$e^{\pi i/2} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{-\pi i/2} = -i$;

e^z is periodiek met periode $2\pi i$.

(12.21) We definiëren de functie tan door

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad (z \in \mathbb{C},\ z \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2}).$$

Voor reële x is $\tan x$ reëel; tan is differentieerbaar, en $\tan' z = \frac{1}{\cos^2 z}$. tan is een oneven functie die periodiek is met periode π.

Op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is tan strikt monotoon stijgend; $\tan 0 = 0$, en $\tan x \downarrow -\infty$ $(x \downarrow -\frac{\pi}{2})$, $\tan x \uparrow +\infty$ $(x \uparrow +\frac{\pi}{2})$.

(12.22) De functies $\arcsin : [-1,+1] \to [-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,+1] \to [0,\pi]$ en $\arctan : (-\infty,+\infty) \to (-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$ worden nu gedefinieerd als in Inf. (2.15) t/m (2.17), zie ook (2.22) t/m (2.25).
We leiden nog reeksontwikkelingen voor arcsin en arctan af:
Voor alle $x \in (-1,+1)$ is
$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
De in het rechterlid voorkomende reeks is de termsgewijze afgeleide van $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; noemen we $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| < 1)$ dan is dus (zie (12.8)) $g'(x) = \arctan' x$ $(|x| < 1)$.
Uit $\arctan 0 = g(0) = 0$ volgt nu $g(x) = \arctan x$, dus

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

Op analoge wijze leidt men uit

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$$

(vgl. (12.9), 2) af dat

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

(12.23) We definiëren de functies sinh en cosh door

$$\sinh z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (z \in ¢)$$

$$\cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (z \in ¢).$$

Er geldt $\sin(iz) = i \sinh z$ en $\cos(iz) = \cosh z$; vgl. Inf. (2.34).

§13. Algemene convergentiekenmerken.

(13.1) In §10 behandelden we een aantal convergentiekenmerken voor reeksen met reële niet-negatieve termen; met behulp hiervan kan men in een aantal gevallen de absolute convergentie van een reeks bewijzen (vgl. (10.19)). We behandelen in deze paragraaf enkele convergentiekenmerken waarmee men in sommige gevallen de convergentie van een niet-absoluut convergente reeks kan bewijzen.

(13.2) Stelling (kenmerk van Dirichlet).
Zij $(E,\|\cdot\|)$ een (reële of complexe) Banachruimte. Zij (λ_n) een rij in $\mathbb{R}$ met $\lambda_n \downarrow 0$; zij Σa_n een reeks in E waarvan de rij der partiële sommen begrensd is.
Dan is $\Sigma\lambda_n a_n$ convergent.
Bewijs: noem $s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$; er bestaat $M > 0$ zó dat $(\forall n \in \mathbb{N})\|t_n\| \leq M$. Voor alle $n,p \in \mathbb{N}$ geldt

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k(t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \lambda_k t_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \lambda_{k+1} t_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) t_k - \lambda_{n+1} t_n + \lambda_{n+p+1} t_{n+p}$$

en dus (aangezien (λ_n) monotoon dalend is):

$$\|s_{n+p} - s_n\| \leq M(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+p+1}) + \lambda_{n+1} M + \lambda_{n+p+1} M = 2M\lambda_{n+1}.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Er is $N \in \mathbb{N}$ zó dat $(\forall n > N)\lambda_{n+1} < \varepsilon/2M$. Er volgt dat $(\forall n > N)(\forall p > 0)\|s_{n+p} - s_n\| < 2M \cdot (\varepsilon/2M) = \varepsilon$; de convergentie van $\Sigma\lambda_n a_n$ volgt nu met (9.3).

(13.3) Zij E de complexe algebra van alle complexe begrensde functies op een verzameling X, $\|\cdot\|$ de sup-norm op E.
We noemen een rij complexwaardige functies (f_n) op X uniform begrensd op X indien (f_n) begrensd is in $(E,\|\cdot\|)$ (d.w.z.: indien $(\exists K > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)|f_n(x)| \leq K$).
Uit (13.2) volgt:

Stelling. Zij X een verzameling. Zij Σf_n een reeks functies $X \to \mathbb{C}$ waarvan de rij der partiële sommen uniform begrensd is op X; zij (λ_n) een rij in $\mathbb{R}$ met $\lambda_n \downarrow 0$. Dan is $\Sigma\lambda_n f_n$ uniform convergent op X.

Bewijs: uit de gegevens volgt dat elke partiële som s_n van Σf_n begrensd is op X; uit $s_n - s_{n-1} = f_n$ $(n > 1)$ volgt dat elke f_n begrensd is op X.
Pas nu (13.2) toe; neem $(E, \|\cdot\|)$ als hierboven, $a_n = f_n$.

(13.4) Met behulp van (13.2) en (13.3) kunnen we voor een klasse machtreeksen enig uitsluitsel geven betreffende de convergentie op hun convergentiecirkel (vgl. (12.6),4):

Stelling. Zij (λ_n) een rij in $\mathbb{R}$ met $\lambda_n \downarrow 0$; laat de convergentiestraal van de complexe machtreeks $\sum_{n\geq 0} \lambda_n z^n$ 1 zijn. Dan geldt:
a. $\sum_{n\geq 0} \lambda_n z^n$ is convergent voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$, $z \neq 1$.
b. Voor elke $\delta > 0$ is $\sum_{n\geq 0} \lambda_n z^n$ uniform convergent op

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \text{ en } |z-1| \geq \delta\}.$$

Bewijs:
a. Voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$, $z \neq 1$ is de rij der partiële sommen van $\sum_{n\geq 0} z^n$ begrensd,want

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|} .$$

Pas nu (13.2) toe met $E = \mathbb{C}$, $a_n = z^n$.
b. Voor elke $\delta > 0$ geldt: op $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \text{ en } |z-1| \geq \delta\}$is de rij der partiële sommen van $\sum_{n\geq 0} z^n$ uniform begrensd, immers

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in X) \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{\delta}.$$

Pas nu (13.3) toe (met $f_n(z) = z^n$).
Opmerking. Is R met $0 < R < \infty$ de convergentiestraal van de complexe machtreeks $\Sigma\alpha_n z^n$, dan levert de substitutie $z = Rw$ een machtreeks $\sum_{n\geq 0} (\alpha_n R^n) w^n$ met convergentiestraal 1. Geldt nu $\alpha_n R^n \downarrow 0$, dan is (13.4) toepasbaar met $\lambda_n = \alpha_n R^n$.

(13.5) Voorbeeld.
$\lambda_n = \frac{1}{n}$; de convergentiestraal van $\Sigma \frac{z^n}{n}$ is 1. Volgens (13.4), a is de reeks convergent voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$, $z \neq 1$; voor $z = 1$ is hij divergent (ga na).

M.b.v. de substitutie $z = e^{i\phi}$ concluderen we: voor alle $\phi \in (0,2\pi)$ is $\Sigma\frac{e^{ni\phi}}{n}$ convergent. Substitutie $\phi = \pi$ in de laatste reeks levert de convergentie van $\Sigma\frac{(-1)^n}{n}$ (vgl. (9.4),3). Volgens (13.4), b is de reeks $\Sigma\frac{z^n}{n}$ voor alle $\delta > 0$ uniform convergent op $\{z \in ¢ \mid |z| = 1$ en $|z-1| \geqslant \delta\}$. M.b.v. de substitutie $z = e^{i\phi}$ volgt (ga na): voor alle $\varepsilon > 0$ is $\Sigma\frac{e^{ni\phi}}{n}$ uniform convergent op $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$.

(13.6) We noemen een reële reeks <u>alternerend</u> indien zijn termen beurtelings niet-negatief en niet-positief zijn. Een alternerende reeks is te schrijven als $\Sigma(-1)^n a_n$ of $\Sigma(-1)^{n+1} a_n$ waarin alle a_n niet-negatief zijn.
Toepassing van (13.2) met $E = \mathbb{R}$ en $a_n = (-1)^n$ levert:

<u>Stelling (van Leibniz)</u>:
Een reële alternerende reeks is convergent indien de absolute waarden der termen een monotoon dalende rij met limiet 0 vormen.

<u>Opmerking</u>. Een voorbeeld van een divergente alternerende reeks waarvan de absolute waarden der termen een rij met limiet 0 vormen is de reeks

$$\Sigma a_n = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16} + \ldots$$

waarin $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ en $a_{2n} = -\frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ is $\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2n}$, dus de reeks $\Sigma(a_{2n-1}+a_{2n})$ is divergent; pas nu (9.8) toe.

(13.7) Voor alle $\alpha \in ¢$ geldt $|\mathrm{Re}\ \alpha| \leqslant |\alpha|$, $|\mathrm{Im}\ \alpha| \leqslant |\alpha|$ en $|\alpha| \leqslant |\mathrm{Re}\ \alpha| + |\mathrm{Im}\ \alpha|$. Er volgt dat voor elke rij (α_n) in $¢$ geldt: (α_n) is convergent, met limiet $\alpha \Leftrightarrow$ de rijen $(\mathrm{Re}\ \alpha_n)$ en $(\mathrm{Im}\ \alpha_n)$ zijn convergent, met limieten resp. $\mathrm{Re}\ \alpha$ en $\mathrm{Im}\ \alpha$. Voor elke reeks $\Sigma\alpha_n$ in $¢$ geldt dus: $\Sigma\alpha_n$ is convergent, met som $s \Leftrightarrow \Sigma\mathrm{Re}\ \alpha_n$ en $\Sigma\mathrm{Im}\ \alpha_n$ zijn convergent, met sommen resp. $\mathrm{Re}\ s$ en $\mathrm{Im}\ s$.
Op analoge wijze bewijst men (ga na): is X een verzameling en is (f_n) een rij functies $X \to ¢$, dan geldt: Σf_n is uniform convergent op X met som $f \Leftrightarrow \Sigma\mathrm{Re}\ f_n$ en $\Sigma\mathrm{Im}\ f_n$ zijn uniform convergent op X, met sommen resp. $\mathrm{Re}\ f$ en $\mathrm{Im}\ f$.

Uit (13.5) volgt nu: voor alle $\phi \in (0,2\pi)$ zijn $\Sigma\frac{\cos n\phi}{n}$ en $\Sigma\frac{\sin n\phi}{n}$ convergent; voor elke $\delta > 0$ zijn beide reeksen uniform convergent op $[\delta, 2\pi-\delta]$.

(13.8) Stelling. Zij $(E,\|\cdot\|)$ een (reële of complexe) Banachruimte. Zij (a_n) een rij in E zó dat geldt:

$$\begin{cases}\Sigma(a_{2n-1} + a_{2n}) \text{ is convergent} \\ a_n \to 0\end{cases}$$

Dan is Σa_n convergent.

Bewijs: is $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$, dan bestaat volgens het gegeven $\lim_{n\to\infty} s_{2n}$; noem deze limiet s. Uit $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ en $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ volgt dat $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$.

We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat.

(13.9) Zij X een verzameling. Nemen we in (13.8) als E de algebra van alle begrensde functies $X \to \mathbb{C}$ en als $\|\cdot\|$ de sup-norm op E, dan volgt:

Stelling. Zij X een verzameling, en zij (f_n) een rij begrensde functies $X \to \mathbb{C}$. Is $\Sigma(f_{2n-1}+f_{2n})$ uniform convergent op X en convergeert (f_n) uniform op X naar 0, dan convergeert Σf_n uniform op X.

(13.10) Voorbeeld. $X = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, $f_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z+n}$. Voor alle $z \in X$ geldt:

$$f_{2n-1}(z) + f_{2n}(z) = \frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \bigg/ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Er volgt dat $\Sigma(f_{2n-1}+f_{2n})$ op X puntsgewijs convergent is. Verder geldt voor alle $z \in X$: $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$. Er volgt dat Σf_n op X puntsgewijs convergent is.

Zij $K > 0$ en $A = \{z \in X \mid |z| \leqslant K\}$. Voor alle $z \in A$ en alle $n > \frac{1}{2}(K+1)$ geldt $|z+2n-1| \geqslant |2n-1-|z|| \geqslant 2n-1-K > 0$ en analoog $|z+2n| \geqslant 2n-K > 0$, dus

$$|f_{2n-1}(z) + f_{2n}(z)| = \left|\frac{1}{z+2n-1} - \frac{1}{z+2n}\right| \leqslant \frac{1}{(2n-1-K)(2n-K)}.$$

Er volgt dat $\Sigma(f_{2n-1}+f_{2n})$ uniform convergent is op A (vgl. (11.5)). Voor alle $z \in A$ en alle $n > K$ geldt

$$|f_n(z)| = \frac{1}{|z+n|} \leq \frac{1}{n-K};$$

er volgt dat de rij (f_n) uniform convergent is op A, met limiet 0. We concluderen dat Σf_n uniform convergent is op A.

§14. Numerieke schattingen.

(14.1) We houden ons in deze paragraaf bezig met het probleem, de som van een reeks reële getallen met een voorgeschreven precisie te benaderen met een van zijn partiële sommen. In dit verband behandelen we hier: 1º. Schattingen m.b.v. de formule van Taylor (zie (14.2),1); 2º. schatten door vergelijken met een meetkundige reeks (zie (14.2), 2); 3º. schattingen voor alternerende reeksen (zie (14.3)); 4º. schattingen m.b.v. integralen (zie (14.7)).

(14.2) Voorbeelden.

1. We willen het getal e benaderen met een precisie 10^{-3} (d.w.z. met een fout waarvan de absolute waarde kleiner is dan 10^{-3}; vgl. (3.1)). Uit de formule van Taylor volgt: voor alle $n \in \mathbb{N}$ is er θ met $0 < \theta < 1$ en

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

Er volgt dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\left|e - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right| < \frac{3}{(n+1)!}$$

Voor alle $n \geq 6$ geldt $3/(n+1)! \leq 10^{-3}$. Er volgt dat

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!}$$

een benadering van e met een precisie 10^{-3} is.

2. We majoreren de door afbreken van de in 1 genoemde reeks gemaakte fout met behulp van een meetkundige reeks: voor alle $n,p \in \mathbb{N}$ is

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+2)^p}\right] < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

en dus

$$|s - s_n| = \lim_{p\to\infty} |s_{n+p} - s_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

De absolute waarde van de fout die gemaakt wordt door de reeks na de term $\frac{1}{n!}$ af te breken is dus kleiner dan 10^{-3} indien

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < 10^{-3}$$

en hieraan is voldaan als $n \geqslant 6$.

(14.3) Stelling. Zij (a_n) een rij reële getallen met $a_n \downarrow 0$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(*) \quad a_{n+1} - a_{n+2} \leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$

Bewijs: voor alle $n,p \in \mathbb{N}$ is

$$a_{n+1} - a_{n+2} < (a_{n+1}-a_{n+2}) + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+2k+1}-a_{n+2k+2}) = \left| \sum_{k=n+1}^{n+2p} (-1)^k a_k \right| =$$

$$= a_{n+1} - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+2k}-a_{n+2k+1}) - a_{n+2p} < a_{n+1};$$

er volgt dat

$$a_{n+1} - a_{n+2} \leqslant \lim_{p\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{n+2p} (-1)^k a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$

Voor de fijnproevers: bewijs dat in (*) de tekens "$\leqslant$" vervangen mogen worden door "$<$" indien $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n > 0$.

(14.4) Voorbeelden.

1. Uit $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ en $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ volgt $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. We kunnen arctan (1) benaderen met behulp van de in (12.22) afgeleide machtreeksontwikkeling voor arctan x; deze is convergent voor x = 1 (gebruik (13.6)), en met (12.15) volgt nu

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Om een benadering van $\frac{\pi}{4}$ te verkrijgen met een precisie 10^{-4} bepalen we n uit

$$\frac{1}{2n+1} < 10^{-4}.$$

We vinden $n \geqslant 5000$: de som van de eerste vijfduizend (!) termen van de reeks is een benadering van $\frac{\pi}{4}$ met een precisie 10^{-4}.

2. Met behulp van de machtreeksontwikkeling voor log (1+x) vinden we (vgl. (12.16)):

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Een benadering van log 2 met precisie 10^{-3} vinden we door de eerste duizend (!) termen van de reeks te sommeren.

3. We benaderen

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx.$$

Definieer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ als $x \neq 0$, $g(0) = 1$. Dan is g continu, en

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 g(x)dx \quad \text{(vgl. (6.14))}.$$

Voor alle $x \in \mathbb{R}$ is

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

(ga na); uit de uniforme convergentie van de laatste reeks op [0,1] (vgl. (12.13), c) volgt dat (vgl. (11.7))

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n}dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \ldots$$

Een benadering met precisie 10^{-4} van de integraal is

$$1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5}$$

aangezien $\frac{1}{7!7} < 10^{-4}$.

(14.5) De in (14.4), 2 gezochte benadering van log 2 kan ook als volgt verkregen worden: uit

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad (|x| < 1)$$

(zie (12.9), 1) volgt

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1)$$

en aftrekken levert

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad (|x| < 1).$$

Substitutie $x = \frac{1}{3}$ levert

$$(**) \quad \log 2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

en de fout bij afbreken na de n-de term is

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2k-1} < \frac{2}{2n+1} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2k} = \frac{1}{4(2n+1)} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2n-1}.$$

Deze fout is kleiner dan 10^{-3} indien $n \geqslant 3$: log 2 wordt met een precisie 10^{-3} benaderd door de som van de eerste <u>drie</u> termen van de reeks in (**).

Om dezelfde precisie te bereiken met de in (14.4),2 genoemde reeks gebruikten we daarvan de eerste duizend termen!

(14.6) Efficiency. Hoewel de in (14.4),1 en 2 gegeven benaderingen juist zijn, zijn ze van praktisch standpunt bekeken weinig efficient. Er moet al een grote hoeveelheid rekenwerk verricht worden om een benadering met een zeer matige precisie te verkrijgen: in elk van de genoemde gevallen sommeert men een groot aantal termen. In de in (14.4), 3 en (14.5) behandelde gevallen kan men daarentegen voor het verkrijgen van dezelfde precisie volstaan met het sommeren van enkele termen.

Van twee reeksen Σa_n en Σb_n met dezelfde som s noemt men de eerste sneller convergent dan de tweede indien bij elke voorgeschreven precisie ε het minimale aantal termen n, nodig om de absolute waarde van de fout bij afbreken van Σa_n na de n-de term kleiner dan ε te maken, kleiner is dan het overeenkomstige minimale aantal voor Σb_n.

Men kan bewijzen dat van de in (14.4),2 en (14.5) gebruikte reeksen de tweede sneller convergeert dan de eerste. We lichten dat als volgt toe: de absolute waarde van de fout bij afbreken na de n-de term van $\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is volgens (14.3) minstens $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ en dit is zeker groter dan 10^{-3} indien $n \leqslant 30$ (ga na), zodat het met minder dan eenendertig termen niet lukt een precisie 10^{-3} te verkrijgen; met de in (14.5) gebruikte reeks lukte dat met drie termen.

Van de middelen ter verhoging van de efficiency noemen we hier: 1° het scherper schatten van de door afbreken verkregen rest (zie (14.7)); 2° het bepalen van een sneller convergente reeks (zie (14.5) en (14.8)).

(14.7) Van de in (14.4),1 gebruikte reeks schatten we de rest bij afbreken scherper als volgt: voor oneven n is (noem $(n+1)/2 = p$):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| = \sum_{m=p}^{\infty} \left(\frac{1}{4m+1} - \frac{1}{4m+3}\right) = \sum_{m=p}^{\infty} \frac{2}{(4m+1)(4m+3)}$$

(vgl. (9.8)).

Noem $f(x) = \frac{2}{(4x+1)(4x+3)}$. Aangezien f voldoet aan de voorwaarden van (10.3) geldt (zie het bewijs van (10.3)):

$$\int_p^\infty f(x)dx \leqslant \sum_{m=p}^\infty f(m) \leqslant \int_{p-1}^\infty f(x)dx$$

dus

$$\sum_{m=p}^\infty f(m) = \int_p^\infty f(x)dx + g(p)$$

waarbij

$$g(p) \leqslant \int_{p-1}^p f(x)dx \leqslant f(p-1).$$

Nu is

$$\int_p^\infty f(x)dx = \int_p^\infty \left(\frac{1}{4x+1} - \frac{1}{4x+3}\right)dx = \tfrac{1}{4}\log\frac{4p+3}{4p+1} = \tfrac{1}{4}\log\left(1 + \frac{2}{4p+1}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{2}{4p+1}\right)^k.$$

We kunnen nu bijvoorbeeld p zó bepalen dat $f(p-1) < \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ ($p = 51$ voldoet) en vervolgens k zó dat

$$\frac{1}{4k}\cdot\left(\frac{2}{4p+1}\right)^k = \frac{1}{4k}\cdot\left(\frac{2}{205}\right)^k < \tfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}$$

($k = 2$ voldoet). Er volgt dat $\frac{\pi}{4}$ met een precisie 10^{-4} wordt benaderd door

$$\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{201} - \frac{1}{203}\right) + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{2}{205}.$$

Met andere keuzen van p en k kan de benadering nog efficiënter plaatsvinden.

(14.8) Als laatste, bijzonder fraai, voorbeeld van verhoging van de efficiency beschouwen we de volgende benadering van $\frac{\pi}{4}$.
Voor alle $x,y \in (0,\frac{\pi}{4})$ geldt $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-(\tan x)(\tan y)}$. Zij nu $x = \arctan\frac{1}{5}$, dus $\tan x = \frac{1}{5}$; dan is $\tan 2x = \frac{5}{12}$, $\tan 4x = \frac{120}{119}$ (dus $\frac{\pi}{4} < 4x < \frac{\pi}{3}$, ga na), $\tan(4x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$, en dus

$$4x - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

(aangezien $0 < 4x-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$).
Er volgt dat

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} =$$
$$= 4\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\tfrac{1}{239}\right)^{2n+1}.$$

Om in de eerste reeks een benadering met precisie 10^{-4} te verkrijgen breken we af na de derde term, aangezien

$$\frac{4}{2n+1} \cdot (\tfrac{1}{5})^{2n+1} < 10^{-4}$$

als $n \geqslant 3$; de precisie is dan zelfs beter dan 10^{-5}. Afbreken van de tweede reeks na de eerste term levert daar een benadering met een precisie die beter is dan 10^{-7}. Het blijkt dat

$$4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{125} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3125}\right] - \frac{1}{239}$$

een benadering van $\frac{\pi}{4}$ is met precisie 10^{-5}. Vergelijk met (14.4),1 en (14.7)!

Opgaven.

29. Bereken de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ als:
$a_n = \frac{n!}{n^n}$; $a_n = \text{arctg}\,\frac{1}{n}$; $a_n = \frac{(-1)^n}{\log n}$; $a_n = \frac{e^{2^{-n}}-1}{n}$;
$a_n = [1 + (-1)^n \frac{1}{n}]^{n^2}$; $a_n = \frac{1}{\sin(e^{-n})}$.

30. Bewijs: $\sum_{n=0}^{\infty} (2\cdot 3^n - 2^n) z^n = \frac{1-z}{1-5z+6z^2}$ $(|z| < \frac{1}{3})$.

31. De machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ heeft convergentiestraal 1 en $a_n \geq 0$ voor alle $n \geq 0$. Bewijs:
als $\sum_{n\geq 0} a_n$ divergent is dan is $\lim_{x\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \infty$.

32. De machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ is convergent voor $z = z_0$.
Bewijs dat de reeks absoluut convergent is voor iedere z met $|z| < |z_0|$.

33. De machtreeksen $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ hebben convergentie stralen R_1 resp. R_2. Voor alle $n \geq 0$ geldt $0 \leq a_n < b_n$.
Bewijs:
(i) $R_1 \geq R_2$.
(ii) voor alle x met $0 < x < R_2$ is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

34. Bewijs:
$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

35. Bewijs dat onderstaande reeksen voor alle $x \in \mathbb{R}$ convergent zijn en bereken hun som:
(i) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n!} x^n$.
(ii) $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^{n-1}}{(n+2)!}$.

36. Zij $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = 1$, $z_0 \neq 1$. Bewijs:
(i) de functie $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, gegeven door $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_0 t)^n}{n}$ is continu.

(ii) f is differentieerbaar op $[0,1)$ en $f'(t) = \frac{z_0}{1-z_0 t}$.

(iii) voor alle $t \in [0,1)$ is $\frac{d}{dt}[e^{f(t)}(1-z_0 t)] = 0$.

(iv) voor alle $t \in [0,1]$ is $e^{f(t)} = \frac{1}{1-z_0 t}$.

(v) voor alle $\phi \in (0,2\pi)$ is $e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{ni\phi}} = \frac{e^{\frac{1}{2}i(\pi-\phi)}}{2 \sin \frac{1}{2}\phi}$

(vi) voor alle $\phi \in (0,2\pi)$ is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\phi}{n} = -\log(2 \sin \tfrac{1}{2}\phi) \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\phi}{n} = \tfrac{1}{2}(\pi-\phi).$$

(vgl. (13.7)).

(vii) merk op dat termsgewijze differentiatie van de reeksen in (vi) tot de absurde conclusie leidt dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\phi = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}\phi \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\phi = -\tfrac{1}{2}.$$

(vgl. opgave 27).

37. Bewijs met gebruikmaking van het resultaat van opgave 36:

(i) voor iedere $a \in (0,2\pi)$ is

$$\tfrac{1}{2}\int_a^{\pi} (\pi-\phi)d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na - \cos n\pi}{n^2}.$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\pi^2$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{12}\pi^2$.

38. Laat $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in een omgeving van 0 een oplossing zijn van de differentiaalvergelijking $xy'' + (1-x)y' + py = 0$ met $f(0) = 1$.

(i) Bewijs: als $p \in \mathbb{N}$ dan is $f(x)$ een polynoom van graad p. Bepaal dit polynoom.

(ii) Bereken f ook voor het geval dat $p = -2$.

39. Voor de onderstaande differentiaalvergelijkingen wordt gevraagd met behulp van reeksontwikkeling in een omgeving van 0 een oplossing te bepalen die aan de gegeven randvoorwaarden voldoet. Druk de gevonden oplossingen uit in elementaire functies.

(i) $x^2 y'' - 2xy' + (2+x^2)y = 0$; $f'(0) = A$, $f''(0) = B$.

(ii) $2xy'' + y' + y = 0$; $f(0) = 1$.

(iii) $(x-1)(x-2)y'' + (x-3)y' - y = 0$; $f(0) = f'(0) = 1$.

40*. De differentiaalvergelijking $x(1-x)y'' + (2-3x)y' - y = 0$ heeft in een omgeving van 0 een oplossing f met $f(0) = 1$ (zie (12.12) voorbeeld 3).

(i) Laat g een oplossing zijn in een omgeving van 1 en zij $g(1) = 1$. Bepaal g met de methode van (12.12).

(ii) Laat h een oplossing zijn in een omgeving van $\frac{1}{2}$ en zij $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\frac{1}{2})^n$.

Bewijs: $(n+2)a_{n+2} + 2a_{n+1} - 4(n+1)a_n = 0 \quad (n \geqslant 0)$.

(iii) Zij $b_n = a_n - (-2)^n a_0$.

Bewijs: $b_0 = 0$ en $b_n = (-2)^{n-1} b_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad (n \geqslant 1)$.

(iv) Bewijs: $h(x) = \frac{a_0}{2x} - \frac{2a_0 + a_1}{4x} \log(2-2x) \qquad (0 < x < 1)$.

Merk op dat h een lineaire combinatie is van f en g.

41. E is een Banachruimte; Σa_n is een convergente reeks in E; (λ_n) is een monotoon dalende begrensde rij reële getallen. Bewijs dat $\Sigma \lambda_n a_n$ convergent is in E.

42. X is een verzameling; (f_n) is een rij functies $X \to ¢$.

Bewijs:

Σf_n is uniform convergent op X met som f $\Leftrightarrow$ $\Sigma \mathrm{Re}\, f_n$ en $\Sigma \mathrm{Im}\, f_n$ zijn uniform convergent op X met sommen resp. Re f en Im f. (vgl. 13.7).

43. Onderzoek in welke punten op de convergentiecirkel de reeks $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ convergent resp. divergent is, als:

$a_n = \frac{(-1)^n}{\log n}$; $a_n = \mathrm{arctg}\, \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

44. Laat zien dat voor de machtreeks van stelling (13.4) uit de overige gegevens al volgt dat de convergentiestraal $R \geqslant 1$ is.

Toon aan dat de voorwaarde $R = 1$ niet gemist kan worden (neem b.v. $\lambda_n = \frac{n!}{n^n}$).

45. Onderzoek voor welke $z \in ℂ$ de volgende reeksen convergent resp. divergent zijn:

(i) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} e^{n(z^2+z)}$.

(ii) $\sum_{n\geq 2} \frac{i^n}{n \log n} (z-1)^{2n}$.

(iii) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{1+z^n}$.

(iv) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nz}{n^2}$.

46. Zij $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq -2\}$.

(i) Bewijs dat de reeks $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n}{(z+n)\log n}$ uniform convergent is op ieder begrensd deel van $ℂ\setminus A$.

(ii) Bewijs dat $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(z+n)\log n}$ continu is op $ℂ\setminus A$.

47. Bewijs:

(i) voor iedere $M > 0$ is $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nz}{n!}$ uniform convergent op $\{z \mid |\mathrm{Im}\, z| \leq M\}$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n!} = e^{\cos z} \sin(\sin z)$.

48. Bewijs dat de reeks $\Sigma \frac{(-1)^n x^2}{nx^2+1}$ op $\mathbb{R}$ uniform convergent is.

49. Bewijs de convergentie van $\Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{-n+1}{n+1}\right)^n$. (vgl. opgave 15 (iv)).

50. Bewijs dat de reeks $\Sigma \binom{a}{n}$ voor $-1 < a < 0$ convergent maar niet absoluut convergent is. (vgl. opgave 17 (ii)).
Aanwijzing: toon om te bewijzen dat $\binom{a}{n} \to 0$ eerst aan dat
$\log|\binom{a}{n+1}| - \log|\binom{a}{n}| = \log\left(1+\frac{|a|}{n}\right) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) <$
$< \frac{|a|-1}{n} + \frac{1}{2n^2}$.

51. Zij (a_n) een rij complexe getallen, zó dat Σa_n^3 absoluut convergent is. Bewijs:
$\Sigma \sin a_n$ is convergent $\Leftrightarrow$ Σa_n is convergent.

52. X is een verzameling; (f_n) en (g_n) zijn rijen begrensde functies $X \to \mathbb{C}$; $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.
Laat de rij $(s_n g_{n+1})$ op X uniform convergent zijn en laat de reeks $\Sigma s_n(g_n - g_{n+1})$ op X uniform convergent zijn.
Bewijs dat de reeks $\Sigma f_n g_n$ uniform convergent is op X.
Ga na dat de stelling (13.3) hier als bijzonder geval uit volgt.

53* Zij $z_0 \in \mathbb{C}$ zó dat de partiële sommen van $\Sigma \frac{a_n}{n^{z_0}}$ begrensd zijn.
Bewijs dat voor iedere $R > 0$ en iedere $\varepsilon > 0$ geldt:
$\Sigma \frac{a_n}{n^z}$ is uniform convergent op $\{z \,|\, |z| \leqslant R$ en $\mathrm{Re}\, z \geqslant \mathrm{Re}\, z_0 + \varepsilon\}$.
Neem daartoe $f_n(z) = \frac{a_n}{n^{z_0}}$ en $g_n(z) = \frac{1}{n^{z-z_0}}$ en bewijs:

(i) $|g_n(z)| = |e^{-(z-z_0)\log n}| \leqslant \frac{1}{n^\varepsilon}$.

(ii) $|g_n(z) - g_{n+1}(z)| \leqslant |g_{n+1}(z)|\,|(1+\frac{1}{n})^{z-z_0} - 1| \leqslant$
$\leqslant \frac{1}{n^\varepsilon}|z-z_0|\log(1+\frac{1}{n})e^{|z-z_0|\log(1+\frac{1}{n})} \leqslant \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}(R+|z_0|)2^{R+|z_0|}$

(iii) Pas nu opgave 52 toe.

54* (i) Bewijs met behulp van opgave 53 dat voor iedere $\varepsilon > 0$ en iedere $R > 0$ de reeks $\Sigma \frac{(-1)^n}{n^z}$ uniform convergent is op $\{z \,|\, |z| \leqslant R$ en $\mathrm{Re}\, z \geqslant \varepsilon\}$.

(ii) Bewijs dat $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$ continu is op $\{z \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

55. Beschouw $\Sigma \frac{e^{2\pi n z}}{n^s}$. Bewijs:

(i) als $\mathrm{Re}\, z < 0$ dan is de reeks voor alle $s \in \mathbb{C}$ convergent;
als $\mathrm{Re}\, z > 0$ dan is de reeks voor alle $s \in \mathbb{C}$ divergent.

*(ii) als $\mathrm{Re}\, z = 0$ en $\mathrm{Im}\, z \notin \mathbb{Z}$ dan is de reeks convergent als $\mathrm{Re}\, s > 0$ (gebruik opgave 53) en divergent als $\mathrm{Re}\, s \leqslant 0$.
(zie opgave 56 voor de overige gevallen).

56* Bewijs: de reeks $\Sigma \frac{1}{n^s}$ is

(i) convergent als $\mathrm{Re}\, s > 1$;

(ii) divergent als $\mathrm{Re}\, s < 1$ (gebruik opgave 53);

(iii) divergent als $\mathrm{Re}\, s = 1$.

(zie aanwijzing volgende pagina).

Aanwijzing: zij $s = 1+iy$ met $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$;
uit het bestaan van $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1-z}{z^2}$ volgt na substitutie
$z = -iy \log(1-\frac{1}{n})$ het bestaan van $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^{-iy}-1+iy\log(1-\frac{1}{n})}{\log^2(1-\frac{1}{n})}$
(als reëel getal);
hieruit volgt de (absolute) convergentie van
$\sum_{n\geq 2} n^{-iy}[(1-\frac{1}{n})^{-iy}-1+iy\log(1-\frac{1}{n})]$
en de convergentie van
$\sum_{n\geq 2} n^{-iy}[-(1-\frac{1}{n})^{-iy}+1+\frac{iy}{n}] = \sum_{n\geq 2}[n^{-iy}-(n-1)^{-iy}+\frac{iy}{n^{1+iy}}]$;
$\sum_{n\geq 2}[n^{-iy}-(n-1)^{-iy}]$ is divergent dus $\sum\frac{1}{n^{1+iy}}$ is divergent.

57. Bewijs dat de fout bij afbreken na de derde term van de reeks $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ voor $x = \frac{1}{31}$ kleiner is dan $2\cdot 10^{-11}$ en voor $|x| \leq \frac{1}{49}$ kleiner is dan 10^{-12}.
Laat zien hoe men door achtereenvolgens $\sum_{n=0}^{2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ voor $x = \frac{1}{31}, \frac{1}{49}, \frac{1}{99}, \frac{1}{161}$ te berekenen $\log n$ voor $n = 2,3,\ldots,10$ met precisie 10^{-9} kan benaderen.

58. (i) Laat zien dat de som van de eerste vier termen van de reeks $\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{3}}{n} x^n$ voor $x = \frac{1}{10}$ een benadering van $\sqrt[3]{1{,}1}$ geeft met precisie 10^{-5}.
(ii) Laat zien dat de som van de eerste drie termen van de reeks $\frac{7}{5}\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ voor $x = \frac{1}{49}$ een benadering van $\sqrt{2}$ geeft met precisie 10^{-6}.

59. Zij f een minstens tweemaal differentieerbare functie $[1,\infty) \to \mathbb{R}$ en zij $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Veronderstel dat voor alle $x \in [1,\infty)$ geldt $f'(x) \leq 0$ en $f''(x) \geq 0$.
Bewijs:
(i) de reeksen $\sum(-1)^{n+1}f(n)$ en $\sum(-1)^{n+1}\frac{f(n)-f(n+1)}{2}$ zijn beide convergent en

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}f(n) = \tfrac{1}{2}f(1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{f(n)-f(n+1)}{2}.$$

(ii) $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{f(n)-f(n+1)}{2}$ is sneller convergent dan $\Sigma(-1)^{n+1}f(n)$.

(iii) voor alle $N \in \mathbb{N}$ is

$$\tfrac{1}{2}f(N+1) \leq \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n+1}f(n)\right| \leq f(N+1) - \tfrac{1}{2}f(N+2)$$

(vgl. (14.3)).

(iv) geef een schatting van het aantal termen van de reeks $\Sigma\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ dat minstens en dat hoogstens nodig is om log 2 met precisie 10^{-3} te benaderen.

60. Zij $f \in C^2[1,\infty)$ en veronderstel dat $f(x) \downarrow 0 \quad (x \to \infty)$.
Laat $\Sigma f(n)$ convergent zijn met som s.
Bewijs:

(i) $s = \sum_{n=1}^{N} f(n) + R_N$ met $\int_{N+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_N \leq \int_{N}^{\infty} f(x)dx$.

(ii) $s = \sum_{n=1}^{N} f(n) + \tfrac{1}{2}f(N+1) + \int_{N+1}^{\infty} f(x)dx + T_N$
met $T_N = \frac{1}{12}\sum_{n=N+1}^{\infty} f''(\xi_n)$ voor zekere $\xi_n \in [n,n+1]$
(aanwijzing: trapeziumregel).

(iii) als $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dan is
$\left|R_N - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right)\right| < \frac{1}{2N^2}$ en
$\left|T_N - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{N^3} + \frac{1}{(N+2)^3}\right)\right| < \frac{1}{2N^4}$.

(iv) laat zien hoe met behulp van (i) resp. (ii) benaderingen van $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ met precisie $\tfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}$ gevonden kunnen worden.

Bij An. II, (7.22):

Zij (V,ρ) een metrische ruimte.

Definitie. V heet rijcompact als

a. iedere rij in V een (in V) convergente deelrij heeft,

of b. iedere oneindige deelverzameling van V een verdichtingspunt (in V) heeft.

Bewijs zelf de equivalentie van a en b.

(7.21) zegt dat een compacte V rijcompact is. We bewijzen in het onderstaande dat een rijcompacte V compact is; het analogon voor topologische ruimten van deze stelling is niet juist.

Stelling 1. V is rijcompact $\Rightarrow$ bij elke $\varepsilon > 0$ zijn er eindig veel bollen in V met straal ε waarvan de vereniging V is.

Bewijs: stel er is $\varepsilon > 0$ zó dat de vereniging van elke eindige collectie bollen met straal ε niet gelijk aan V is.
Zij $a_1 \in V$; $V \not\subset B(a_1;\varepsilon)$, dus er is $a_2 \in V$ met $\rho(a_2,a_1) \geqslant \varepsilon$.
$V \not\subset B(a_1;\varepsilon) \cup B(a_2;\varepsilon)$, dus er is $a_3 \in V$ met $\rho(a_3,a_1) \geqslant \varepsilon$ en $\rho(a_3,a_2) \geqslant \varepsilon$. Zo voortgaande (volledige inductie) construeren we een rij (a_n) in V met

$$(\forall n)(\forall i < n)\rho(a_n,a_i) \geqslant \varepsilon.$$

We bewijzen dat $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ geen verdichtingspunt heeft, waarmee een tegenspraak is bereikt:
Stel A heeft een verdichtingspunt λ. Dan zijn er $p,q \in \mathbb{N}$ met $p > q$, $\rho(a_p,\lambda) < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $\rho(a_q,\lambda) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Er volgt dat

$$\rho(a_p,a_q) \leqslant \rho(a_p,\lambda) + \rho(a_q,\lambda) < \varepsilon,$$

hetgeen in tegenspraak is met $(\forall i < p)\rho(a_p,a_i) \geqslant \varepsilon$.

Stelling 2. V is rijcompact $\Rightarrow$ V is compact.

Bewijs: stel P is een open overdekking van V die geen eindige overdekking van V bevat. Volgens stelling 1 zijn er eindig veel bollen in V met straal 1 waarvan de vereniging V is; minstens één van deze bollen, zeg $B(a_1;1)$, is niet eindig overdekbaar m.b.v. P (d.w.z.: is niet door een vereniging van eindig veel elementen van P te overdekken).

Er zijn eindig veel bollen in V met straal $\frac{1}{2}$ waarvan de vereniging $B(a_1;1)$ bevat; minstens één van deze bollen, zeg $B(a_2;\frac{1}{2})$, is niet eindig overdekbaar m.b.v. P. Zo doorgaande construeren we een rij bollen $B(a_n;\frac{1}{n})$ die elk niet eindig overdekbaar zijn m.b.v. P. Kies $x_n \in B(a_n;\frac{1}{n})$; zij $(x_{\phi(n)})$ een convergente deelrij van (x_n), met limiet λ. Er is $A \in P$ met $\lambda \in A$; A is open, dus er is $\varepsilon > 0$ zó dat $B(\lambda;\varepsilon) \subset A$.

Er is $n \in \mathbb{N}$ met $\phi(n) > \frac{3}{\varepsilon}$ en $x_{\phi(n)} \in B(\lambda;\frac{1}{3}\varepsilon)$. Voor alle $y \in B(a_{\phi(n)};\frac{1}{\phi(n)})$ geldt nu

$$\rho(y,\lambda) \leqslant \rho(y,a_{\phi(n)}) + \rho(a_{\phi(n)},x_{\phi(n)}) + \rho(x_{\phi(n)},\lambda) <$$
$$< \frac{1}{\phi(n)} + \frac{1}{\phi(n)} + \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

We concluderen dat

$$B(a_{\phi(n)};\frac{1}{\phi(n)}) \subset B(\lambda;\varepsilon) \subset A,$$

tegenspraak.

Tentamen ANalyse II, eerste deel. 5 januari 1974
9.30-12.30 uur.

1. Zij V de verzameling der reële getallen. De functie

$$\rho : V \times V \to \mathbb{R}$$

is gegeven door

$$\rho(x,y) = |x| + |y| \quad \text{als } x \neq y$$
$$\rho(x,x) = 0$$

a. Bewijs dat ρ een metriek op V is.

b. Bewijs dat 0 het enige verdichtingspunt van (V,ρ) is.

c. Zij (a_n) een Cauchy-rij in (V,ρ) met de eigenschap

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow a_n \neq a_m.$$

Bewijs: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in (V,ρ).

2. De rij (f_n) van begrensde continue functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is gegeven door

$$f_n(x) = \frac{n \sin \frac{1}{n}x}{x} \quad \text{als } x \neq 0.$$
$$f_n(0) = 1.$$

a. Bewijs: Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ bestaat $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

b. Bewijs: Er is een begrensde continue functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zó, dat (f_n) voor ieder positief reëel getal A uniform naar f convergeert op het segment $[-A,A]$.

c. Onderzoek of (f_n) op $\mathbb{R}$ uniform convergeert naar de in b. gevonden functie f. Bewijs uw beweringen.

3. V is een metrische ruimte en A is een samenhangende deelverzameling van V. Zij B een deelverzaleing van V met de eigenschap

$$A \subset B \subset \overline{A}.$$

a. Bewijs: Voor iedere open deelverzameling O van V geldt:

$$O \cap B \neq \emptyset \Rightarrow O \cap A \neq \emptyset.$$

b. Bewijs: B is samenhangend.

4. Voor welke reële getallen p is de **oneigenlijke** integraal

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^p \log(x+1)}\, dx$$

convergent, respectievelijk divergent.
Bewijs uw beweringen.

Tentamen Analyse II, tweede deel

18 januari 1974
14.00-17.00 uur.

1. E is de reële lineaire ruimte van de continue functies $[0,1] \to \mathbb{R}$.
   a) Bewijs dat de afbeelding $f \to \|f\| = \int_0^1 x|f(x)|dx$ een norm is op E.
   b) De functies $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ zijn gegeven door $f_n(x) = n(1-x)^n$. Bewijs dat de rij (f_n) in $(E, \|.\|)$ convergeert.

2. Onderzoek voor welke reële p de volgende reeksen convergent zijn, en voor welke reële p zij divergent zijn.
   a) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \operatorname{arctg}(\frac{pn+1}{n})$.
   b) $\sum_{n\geq 2} \frac{(\log n)^p}{n}$.

   Bewijs uw beweringen.

3. Onderzoek voor welke $z \in \mathbb{C}$ de reeks
   $$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n-\sqrt{n}}$$
   convergent resp. divergent is.
   Bewijs uw beweringen.

4. Gegeven is de reeks $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{e^{nx}-1}$.
   Bewijs:
   a) de reeks is divergent voor alle $x \in (-\infty,0)$ en convergent voor alle $x \in (0,\infty)$.
   b) de som van de reeks is een continue functie $(0,\infty) \to \mathbb{R}$.